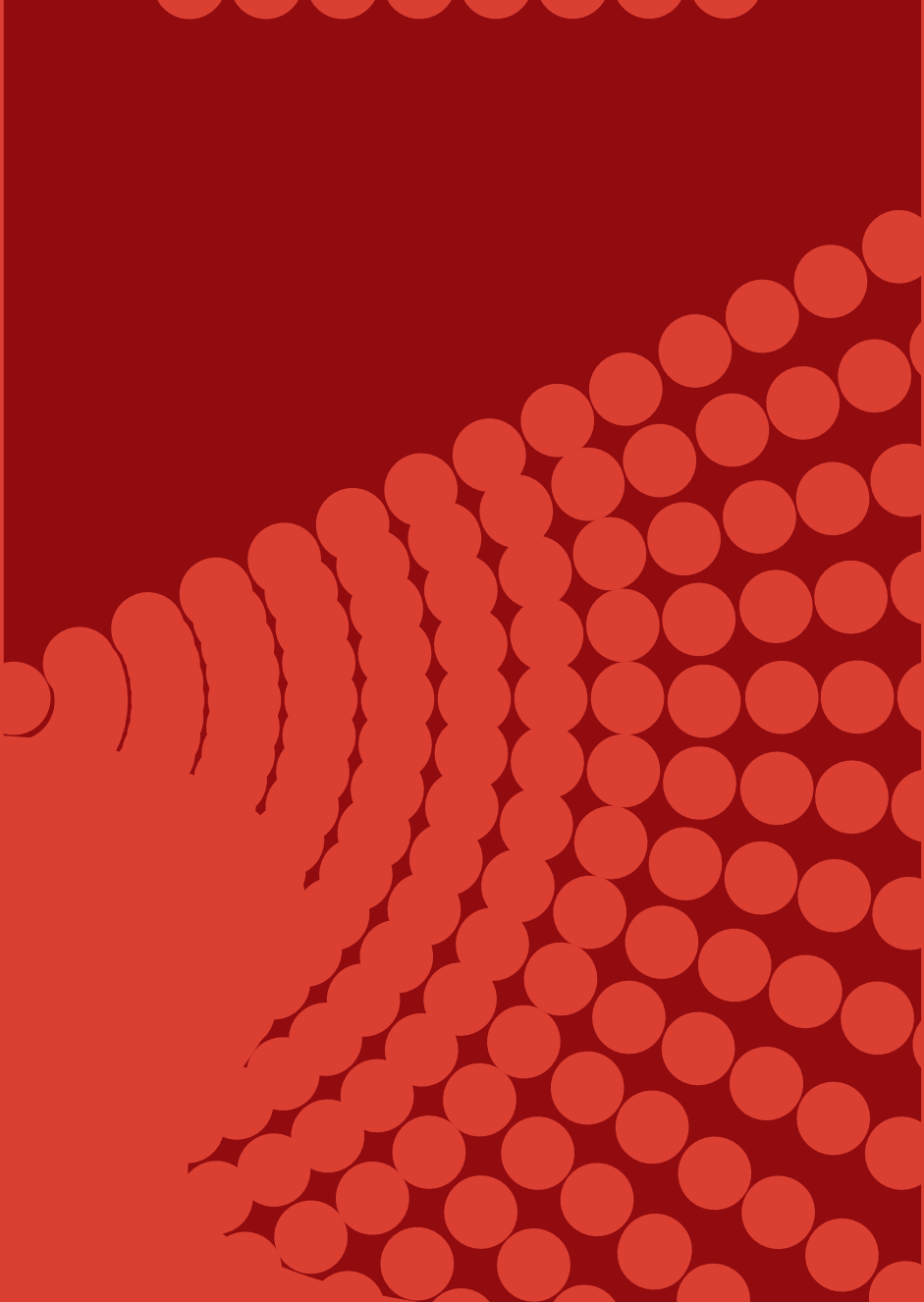




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ Δ.Ε.

# ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ ΑΓΩΓΗΣ



ΤΕΥΧΟΣ 1/2017

# ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΣΚΕΨΗΣ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΟΦΟΙΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΤΑ VAN HIELE

Παναγιώτης Καλαϊτζίδης  
Εκπαιδευτικός, *M.Ed.*

Αθηνά Παππά  
Εκπαιδευτικός

Χαράλαμπος Σακονίδης  
Καθηγητής, *Π.Τ.Δ.Ε.*  
Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης

## Abstract

Van Hiele suggested a developmental model of student's geometrical thinking consisted of five levels. Based on this model, the aim of this study is to examine the geometrical thinking characteristics of primary and high school graduates and the van Hiele level at which they are classified. The sample consisted of 220 students graduating from elementary and high schools in the urban area of Thrace. The results showed that the majority of the subjects were classified at the first two van Hiele levels, with the high school students performing slightly better than the primary school graduates.

## Λέξεις κλειδιά

Γεωμετρική σκέψη, επίπεδα ανάπτυξης, μαθητές Δημοτικού Σχολείου και Γυμνασίου, θεωρία Van Hiele.

## 0. Εισαγωγή

Η Γεωμετρία χρησιμοποιείται καθημερινά από πολλούς ανθρώπους, καθώς αποτελεί ένα εργαλείο ανάλυσης και ερμηνείας του κόσμου που μας περιβάλλει (Τριανταφυλλίδης, 2005). Στο σχολείο η διδασκαλία της γεωμετρίας στοχεύει κυρίως στην ανάπτυξη της ικανότητας αντίληψης του χώρου και της νοερής σύλληψης των αντικειμένων, οδηγώντας τους μαθητές στην άμεση σύνδεση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο (Τουμάσης, 2002).

Ειδικότερα, αντικείμενο της διδασκαλίας της Γεωμετρίας στο Δημοτικό Σχολείο είναι η *μη τυπική Γεωμετρία*, δηλαδή, η αντίληψη των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τις αισθήσεις και την εμπειρία. Μεταγενέστερα στο Γυμνάσιο οι μαθητές αρχίζουν να προσεγγίζουν τις γεωμετρικές έννοιες σε πιο αφηρημένο επίπεδο. Οδηγούνται μεν σε θεωρήματα αλλά μέσω της γενίκευσης συγκεκριμένων παραδειγμάτων και όχι ως απόρροια μιας συγκεκριμένης αποδεικτικής διαδικασίας (Πίνακας 1).

**Πίνακας 1:** Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα από τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στην υποχρεωτική εκπαίδευση

| <i>Δημοτικό Σχολείο</i>   | <i>Γυμνάσιο</i>  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων</li> <li>• Κατασκευή και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων</li> <li>• Ανάλυση γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες</li> <li>• Μετατόπιση στροφή και ανάκλιση</li> <li>• Αξονική και κεντρική συμμετρία</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Κριτήρια ισότητας των τριγώνων</li> <li>• Αναγνώριση ομοιοθέτων &amp; όμοιων σχημάτων και σύνδεση της ομοιοθεσίας με την αναλογία</li> <li>• Κατασκευή ομοιοθέτων και όμοιων σχημάτων</li> <li>• Θεώρημα του Θαλή: Σύνδεση αναλογιών, παραλληλίας και όμοιων τριγώνων.</li> <li>• Επίλυση προβλημάτων χρησιμοποιώντας την ομοιότητα και κλίμακες</li> </ul> |

Παρά την αναγνωρισμένη αξία της καλλιέργειας της γεωμετρικής σκέψης και την κεντρική της θέση στο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών, οι μαθητές θεωρούν τη Γεωμετρία ως ένα από τα δυσκολότερα αντικείμενα μάθησης (Τουμάσης, 2002). Οι δυσκολίες τους εντοπίζονται σε ένα ευρύ φάσμα: από την ορολογία και την ικανότητα αντίληψης του χώρου στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση, μέχρι την ανάπτυξη συλλογισμών και την κατασκευή αποδείξεων για γεωμετρικές προτάσεις στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ειδικότερα, η έρευνα δείχνει ότι οι μαθητές τείνουν να συγχέουν ουσιώδη χαρακτηριστικά μιας έννοιας με ασήμαντα, όπως ο προσανατολισμός ενός σχήματος (Vinner & Hershkowitz, 1980, Κολέζα, 2000). Ακόμη, αδυνατούν να εφαρμόσουν μαθηματικούς ορισμούς, παρ' ότι τους γνωρίζουν, όπως, για παράδειγμα, γνωρίζουν τον ορισμό του ύψους αλλά δυσκολεύονται να το χαράξουν σε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο. Τέλος, σημαντικές δυσκολίες καταγράφονται στην κατανόηση της σημασίας της απόδειξης (Τουμάσης, 2002).

Η παρούσα εργασία επιδιώκει να διερευνήσει βασικά χαρακτηριστικά της γεωμετρικής σκέψης τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου αναφορικά με τα επίπεδα σχήματα. Συγκεκριμένα, μελετά τον βαθμό κατάκτησης των απαιτούμενων και αναπτυξιακά αναμενόμενων γνώσεων που αφορούν τα επίπεδα σχήματα από μαθητές της συγκεκριμένης ομάδας. Για τους σκοπούς της μελέτης αξιοποιήθηκε η θεωρία των Van Hiele, η οποία προσφέρει ένα λειτουργικό και αναγνωρισμένο τρόπο μελέτης της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών.

## 1. Βιβλιογραφική πλαισίωση

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται η σκιαγράφηση των βασικών στοιχείων της θεωρητικής οπτικής των Van Hiele, η οποία αποτέλεσε τη βάση σχεδιασμού και υλοποίησης της εμπειρικής μελέτης που συνιστά αντικείμενο της παρούσας εργασίας, καθώς και μια αποτίμηση της αξιοποίησής τους σε ερευνητικό και διδακτικό επίπεδο.

### ***1.1. Επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele***

Οι Dina και Pierre Marie Van Hiele δημιούργησαν ένα μοντέλο για την κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών, το οποίο αποτελείται από πέντε επίπεδα ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, ο μαθητής, βοηθούμενος από κατάλληλες εκπαιδευτικές πρακτικές, περνά από αυτά τα επίπεδα, ξεκινώντας με την αναγνώριση των σχημάτων ως ολοτήτων (επίπεδο 1)<sup>1</sup>, προχωρώντας στην ανακάλυψη των ιδιοτήτων των σχημάτων και του άτυπου λογικού συλλογισμού για αυτά τα σχήματα και τις ιδιότητές τους (επίπεδα 2 και 3), με αποκορύφωμα την αυστηρή μελέτη της αξιωματικής Γεωμετρίας (επίπεδα 4 και 5) (Fuys, Geddes & Tischler, 1988). Πιο συγκεκριμένα, στο επίπεδο 1 οι μαθητές αναγνωρίζουν και ονομάζουν τα σχήματα με βάση τα συνολικά οπτικά χαρακτηριστικά τους (αναγνώριση της μορφής Gestalt). Στο δεύτερο επίπεδο αρχίζουν να κατανοούν ότι διάφορα σχήματα κατατάσσονται στην ίδια ομάδα λόγω των κοινών ιδιοτήτων τους. Στο τρίτο επίπεδο αντιλαμβάνονται τις σχέσεις που υπάρχουν μέσα στο ίδιο το σχήμα, και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σχημάτων. Στο τέταρτο επίπεδο κατανοούν την ανάγκη της παραγωγικής σκέψης, εντάσσοντας την γεωμετρική θεωρία σε ένα αξιωματικό σύστημα και, τέλος, στο πέμπτο συγκρίνουν διαφορετικά αξιωματικά συστήματα (Κοντογιάννης & Ντζιαχρήστος 1999, Κολέζα, 2000).

Τα βασικά χαρακτηριστικά των πέντε επιπέδων ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης έχουν ως εξής (Van de Walle, 2005):

1. Τα επίπεδα είναι διαδοχικά. Οι μαθητές, για να φτάσουν σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο πάνω από το πρώτο, πρέπει να περάσουν από όλα τα προηγούμενα επίπεδα.
2. Τα επίπεδα δεν εξαρτώνται από την ηλικία, όπως τα στάδια του Piaget. Στο επίπεδο 1 θα μπορούσε να βρίσκεται κάποιος μαθητής της Γ' Δημοτικού, όπως και κάποιος του Γυμνασίου.
3. Ο πλέον κρίσιμος παράγοντας για τη μετάβαση από το ένα επίπεδο στο άλλο είναι η γεωμετρική εμπειρία, μέσα από δραστηριότητες που προάγουν τη συζήτηση, την αλληλεπίδραση και τη διερεύνηση του περιεχομένου του επόμενου επιπέδου.
4. Κάθε επίπεδο περιέχει δικά του γλωσσικά σύμβολα και δικό του δίκτυο σχέσεων που συνδέουν τα σύμβολα αυτά (Van Hiele, 1986). Όταν η διδασκαλία ή η γλώσσα βρίσκονται σε ένα επίπεδο υψηλότερο από εκείνο του μαθητή, το αποτέλεσμα είναι η έλλειψη επικοινωνίας και η απλή αποστήθιση κανόνων που δεν έχουν δομηθεί και κατανοηθεί ορθά, προσφέροντας στον μαθητή προσωρινή και επιφανειακή επιτυχία.

## 1.2. Προσδιορισμός του επιπέδου των μαθητών: ερευνητικά δεδομένα

Κατά καιρούς έχουν χρησιμοποιηθεί διάφορες δοκιμασίες για τον προσδιορισμό του επιπέδου σκέψης των μαθητών (Gutierrez, Jaime, Burger & Shaughnessy, 1991). Από τις πιο γνωστές είναι το *Van Hiele geometry test* του Usiskin (1982), με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, το τεστ των Gutierrez και Jaime (1998), με ανοιχτές ερωτήσεις (open-ended questions) και κλινικές συνεντεύξεις με ανοιχτές ερωτήσεις από τους Burger και Shaughnessy (1986).

Πιο συγκεκριμένα, ο Usiskin (1982) χρησιμοποίησε ένα τεστ για την εξακρίβωση των επιπέδων Van Hiele, το οποίο αποτελείτο από 25 ερωτήματα (5 ερωτήματα X 5 επίπεδα). Συμπεράνε, μεταξύ άλλων, ότι το επίπεδο 5 δεν υπάρχει ή δεν είναι ελέγξιμο, ενώ όλα τα άλλα επίπεδα είναι ελέγξιμα. Πάνω από τα δύο τρίτα των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνά του (2.700 μαθητές γυμνασίων των ΗΠΑ) απάντησαν στα θέματα του τεστ με τρόπους που διευκόλυναν την αντιστοίχιση κάποιου επιπέδου Van Hiele σε αυτούς (Usiskin, 1982).

Οι Gutierrez, Jaime και Fortuny (1991) παρουσίασαν έναν εναλλακτικό τρόπο προσδιορισμού των επιπέδων Van Hiele, ειδικά για μαθητές που βρίσκονται *ανάμεσα σε δύο επίπεδα*. Η μέθοδος αξιολόγησης που υιοθέτησαν επιδίωκε να μετρήσει την απόκτηση (acquisition) των επιπέδων (ποσοτικά και ποιοτικά). Εάν ένας μαθητής δεν είχε καμία επίγνωση ή αποτύγχανε να ενταχθεί σε κάποιο επίπεδο, κατατασσόταν στη βαθμίδα «καμία απόκτηση» (βαθμός κατάρκτησης 0% - 15%). Μαθητές με «χαμηλή απόκτηση» (βαθμός κατάρκτησης 15% - 40%) θεωρήθηκε ότι άρχιζαν να προσπαθούν να λειτουργούν στο συγκεκριμένο επίπεδο, όμως αποτύγχαναν και προσέφευγαν σε ένα χαμηλότερο επίπεδο. Στην «ενδιάμεση απόκτηση» ενός επιπέδου (βαθμός κατάρκτησης 40% - 60%) εντάχθηκαν μαθητές που εργάζονταν με άνεση στο επίπεδό τους αλλά, όταν αντιμετώπιζαν κάποια δυσκολία, παλινδρομούσαν στο χαμηλότερο επίπεδο. Η «υψηλή απόκτηση» ενός επιπέδου (βαθμός κατάρκτησης 60% - 85%) αφορούσε έναν μαθητή, του οποίου η σκέψη ταίριαζε με τις περιγραφές και τα χαρακτηριστικά του επιπέδου, αλλά ήταν επιρρεπής σε λάθη. Τέλος, στην κατηγορία «πλήρης απόκτηση» ενός επιπέδου (βαθμός κατάρκτησης 85% - 100%) κατατάχθηκαν μαθητές που κατανοούσαν πλήρως όσα απαιτούσε το επίπεδο και λειτουργούσαν με άνεση σε αυτό.

Σε μεταγενέστερη έρευνα των Gutierrez και Jaime (1998), όπου χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση των Gutierrez, Jaime και Fortuny (1991), προέκυψε πως οι περισσότεροι από τους 309 συμμετέχοντες μαθητές, ηλικίας 11 - 18 χρονών, είχαν υψηλή ή πλήρη απόκτηση του πρώτου επιπέδου και προόδευαν προς την απόκτηση του δεύτερου επιπέδου γεωμετρικής σκέψης. Αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν και από τις έρευνες των Usiskin (1982), Wirszup (1976) και Hoffer (1986), οι οποίοι ισχυρίστηκαν ότι «η πλειονότητα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης βρίσκονται στο

πρώτο και δεύτερο επίπεδο Van Hiele». Επιπλέον, οι Fuys, et al. (1988) διεξήγαγαν μια έρευνα με συνεντεύξεις μαθητών 6<sup>ης</sup> (ΣΤ' Δημοτικού) και 9<sup>ης</sup> (Γ' Γυμνασίου) τάξης, από την οποία προέκυψε ότι οι περισσότεροι μαθητές ανήκαν στα επίπεδα 1 και 2 και σχεδόν οι μισοί μαθητές του δείγματος της 9<sup>ης</sup> τάξης ανήκαν κυρίως στο επίπεδο 2.

Παρόμοια είναι τα αποτελέσματα από ανάλογες έρευνες στην Ελλάδα. Συγκεκριμένα, από την έρευνα του Τζίφα (2005), όπου χρησιμοποιήθηκε το *Van Hiele geometry test* του Usiskin (1982), προέκυψε ότι το 60,6% των 1838 μαθητών Γυμνασίων και Λυκείων της Ελλάδας που συμμετείχαν βρίσκονταν στα επίπεδα 1 και 2 με το αυστηρό κριτήριο και το 48,6% με το ελαστικό κριτήριο (με το αυστηρό κριτήριο να δηλώνει δυσκολότερη κατάσταση σε ανώτερα επίπεδα, ενώ το ελαστικό ευκολότερη). Παρόμοια αποτελέσματα προέκυψαν και από την έρευνα των Δημάκου και Νικολουδάκη (2009). Πιο συγκεκριμένα, το 21,6% του δείγματος (μαθητές Α' Λυκείου) ανήκαν στο πρώτο επίπεδο, το 46,8% στο δεύτερο και το 16,8% στο τρίτο. Από την έρευνα του Σαλονικίου (2008), όσον αφορά το βαθμό απόκτησης του επιπέδου 2 κατά Van Hiele, με βάση το μοντέλο των Gutierrez, Jaime και Fortuny (1991), βρέθηκε ότι σχεδόν όλοι οι μαθητές του δείγματος (περίπου το 95% από 110 μαθητές της Δ' και της ΣΤ' τάξης του Δημοτικού Σχολείου) κατατάσσονταν τουλάχιστον στην «ενδιάμεση απόκτηση» του επιπέδου 2. Τέλος, ο Ζάχος (2000), στην προσπάθειά του να εξηγήσει για ποιο λόγο οι μαθητές δυσκολεύονται να παρακολουθήσουν τη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Λύκειο, η οποία απαιτεί από αυτούς να έχουν αποκτήσει γνώσεις και ικανότητες 4<sup>ου</sup> επιπέδου, βρήκε ότι το 75% των μαθητών του δείγματός του (458 μαθητές Β' Λυκείου) βρίσκονταν κάτω από το επίπεδο 4 Van Hiele, οπότε αδυνατούσαν να παρακολουθήσουν με ευκολία τη διδασκαλία της Γεωμετρίας.

## 2. Η Μελέτη

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, επιδίωξη της παρούσας έρευνας ήταν η μελέτη της γεωμετρικής σκέψης τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου. Η ερευνητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε είναι η Περιγραφική (Cohen, Manion & Morrison, 2008), καθώς η εργασία επιχειρεί μια αποτύπωση των χαρακτηριστικών της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και του επιπέδου στο οποίο κατατάσσονται.

Το δείγμα αποτέλεσαν 220 μαθητές από 6 σχολεία αστικής περιοχής της Θράκης, οι οποίοι επιλέχτηκαν με τη μέθοδο της επιλεκτικής δειγματοληψίας. Από αυτούς, οι 104 (49 αγόρια και 55 κορίτσια) ήταν τελειόφοιτοι του Δημοτικού Σχολείου (ΣΤ') και οι υπόλοιποι 116 (55 αγόρια και 61 κορίτσια) ήταν τελειόφοιτοι Γυμνασίου (Γ').

**Ερευνητικό πρόβλημα:** Διερεύνηση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των τελειόφοιτων του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου κατά Van Hiele.

**Ερευνητικά ερωτήματα:** α) Ποια χαρακτηριστικά διέπουν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου; β) Πώς κατανέμονται οι μαθητές του δείγματος του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου στα επίπεδα Van Hiele;

Για τους σκοπούς της έρευνας κατασκευάστηκε ένα ερωτηματολόγιο – τεστ που αποτελείται από 15 ερωτήσεις (βλ. Παράρτημα). Έξι από αυτές (ερ. 1, 3, 7, 8, 9, 13) είναι κλειστού τύπου, πέντε (2, 6, 12, 14, 15), ζητούν επιπλέον αιτιολόγηση, τρεις ερωτήσεις (4, 5, 10) είναι σχεδίασης και, τέλος, η ερώτηση 11 είναι ανοιχτού τύπου. Οι ερωτήσεις 1, 2, 3, 6, 8, 9 και 12 αποτελούν παραλλαγές του *Van Hiele Geometry Test* του Usiskin (1982), ενώ οι υπόλοιπες διαμορφώθηκαν με βάση σχετικές δραστηριότητες που προτείνονται από τον van de Walle (2005).

Οι ερωτήσεις του ερευνητικού εργαλείου αντιστοιχούν στα τρία πρώτα επίπεδα γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele και κατανέμονται ως εξής: Οι ερωτήσεις 1 έως 5 ανήκουν στο πρώτο επίπεδο, αυτό της αναγνώρισης, με την ερώτηση 1 να εξετάζει επιπλέον και γνώσεις του τρίτου επιπέδου (εφεξής ερώτηση 1<sub>3</sub><sup>ο</sup>). Οι ερωτήσεις 6 έως 10 ανήκουν στο δεύτερο επίπεδο, δηλαδή της ανάλυσης. Οι ερωτήσεις 11 έως 15 ανήκουν στο τρίτο επίπεδο, δηλαδή της διάταξης – άτυπης αφαίρεσης. Τα ερωτηματολόγια χορηγήθηκαν στους μαθητές προς το τέλος της σχολικής χρονιάς (Απρίλιο) και η χρονική διάρκεια συμπλήρωσής τους ήταν περίπου 35'.

Κατά την ανάλυση των δεδομένων αρχικά πραγματοποιήθηκε ανάλυση αξιοπιστίας του ερευνητικού εργαλείου με σκοπό να εντοπιστούν ερωτήσεις με προβλήματα στο περιεχόμενο ή τη διατύπωση. Στη συνέχεια κατασκευάστηκαν πίνακες διπλής εισόδου 2x2 και αναλύθηκαν με τη βοήθεια του ελέγχου ανεξαρτησίας του Fisher. Οι αναλύσεις πραγματοποιήθηκαν με τη χρήση του στατιστικού πακέτου SPSS (έκδοση 17.0). Επιπρόσθετα, για την ανάλυση ποιοτικών δεδομένων εφαρμόστηκε η μέθοδος της ανάλυσης περιεχομένου, με βασικό στόχο την ανάδειξη χαρακτηριστικών που υποδεικνύουν όψεις της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών.

Για να ελεγχθεί η αξιοπιστία των ερωτήσεων του τεστ θεωρήθηκε απαραίτητη η περαιτέρω ανάλυση των δεδομένων της έρευνας σύμφωνα με την Κλασική Ψυχομετρική Θεωρία (Classical Test Theory) (Crocker & Algina, 1986). Αυτή προϋποθέτει τον έλεγχο του βαθμού δυσκολίας (Item Difficulty, ποσοστό μαθητών που απάντησαν σωστά) και του βαθμού διακριτότητας (Item Discrimination) της κάθε ερώτησης. Ο βαθμός διακριτότητας κάθε ερώτησης αναφέρεται στο βαθμό συσχέτισης της αντίστοιχης μεταβλητής με τη συνολική βαθμολογία του τεστ και για τον υπολογισμό του χρησιμοποιήθηκε ο δείκτης συσχέτισης  $r_{pbis}$  (point biserial correlation) (Πίνακας 2). Η τιμή του δείκτη φανερώνει το βαθμό στον οποίο μία ερώτηση μπορεί να διακρίνει τους μαθητές με υψηλές από αυτούς με χαμηλές επιδόσεις. Δηλαδή, μετράει το βαθμό στον οποίο οι σωστές (ή οι λανθασμένες) απαντήσεις στην ερώτηση αντιστοιχούν σε



υψηλές (ή χαμηλές) συνολικές επιδόσεις στο εργαλείο μέτρησης. Παράλληλα, με τον τρόπο αυτό αναδεικνύεται η σημασία της ερώτησης στην πρόβλεψη της συνολικής επίδοσης. Το εύρος των τιμών του δείκτη  $r_{pbis}$  κυμαίνεται από -1 (τέλεια αρνητική) έως +1 (τέλεια θετική συσχέτιση). Τιμές του δείκτη μικρότερες του +0,3 αντιστοιχούν σε ερωτήσεις με χαμηλή διακρίτοτητα, οι οποίες είναι καλύτερο να αφαιρεθούν από το ερευνητικό εργαλείο.

Για να θεωρηθεί ότι ένας μαθητής ανήκει σε κάποιο επίπεδο Van Hiele, θα έπρεπε να είχε απαντήσει σωστά σε 3 από τις 5 ερωτήσεις του αντίστοιχου επιπέδου (Πίνακας 3). Ο έλεγχος αυτού του κριτηρίου πραγματοποιήθηκε με τη χρήση του λογιστικού προγράμματος EXCEL (Microsoft Office 12).

Σύμφωνα με τη θεωρία Van Hiele, τα επίπεδα είναι διαδοχικά, δηλαδή για να μπορέσει ένας μαθητής να καταταχθεί σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο θα πρέπει να έχει αποκτήσει όλα τα προηγούμενα. Με βάση αυτό, θεωρήσαμε ότι στο επίπεδο 1 κατατάσσονται οι μαθητές που έχουν αποκτήσει μόνο το επίπεδο 1 και κανένα άλλο. Στο επίπεδο 2 κατατάσσονται οι μαθητές που έχουν αποκτήσει μόνο τα επίπεδα 1 και 2. Στο επίπεδο 3 κατατάσσονται αυτοί που έχουν αποκτήσει τα επίπεδα 1, 2 και 3. Επιπλέον, οι μαθητές που δεν έχουν αποκτήσει κανένα από τα τρία επίπεδα κατατάσσονται στο επίπεδο 0. Τέλος, σε ξεχωριστές κατηγορίες κατατάσσονται οι μαθητές που έχουν αποκτήσει ένα επίπεδο όχι όμως τα προηγούμενά του σύμφωνα με το πρότυπο Van Hiele (Πίνακας 4).

### 3. Ανάλυση δεδομένων – Αποτελέσματα

Η ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων της έρευνας στην κατεύθυνση που αποτυπώθηκε παραπάνω οδήγησε σε μια σειρά από απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν.

Αρχικώς, ο Πίνακας 2 παρουσιάζει συνοπτικά για κάθε ερώτηση τις συχνότητες και τα ποσοστά επιτυχίας του δείγματος, τα αποτελέσματα από τον έλεγχο του βαθμού δυσκολίας (Item Difficulty) και του βαθμού διακρίτοτητας (Item Discrimination) καθώς και τις τιμές της παρατηρούμενης στάθμης σημαντικότητας του ελέγχου ανεξαρτησίας του Fisher.



**Πίνακας 2:** Ποσοστό επιτυχίας μαθητών ανά ερώτηση και βαθμός δυσκολίας και διακριτότητας ερωτήσεων.

| Ερωτήσεις                | Δημοτικό |        |                              | Γυμνάσιο |        |                              | Σύγκριση<br>*Σημαντικότητα<br>p |
|--------------------------|----------|--------|------------------------------|----------|--------|------------------------------|---------------------------------|
|                          | f        | (%)    | point<br>biserial<br>(rpbis) | f        | (%)    | point<br>biserial<br>(rpbis) |                                 |
| Ερώτηση 1                | 45       | 43,27% | 0,37                         | 29       | 25%    | 0,26                         | 0,001                           |
| Ερώτηση 2                | 82       | 78,85% | 0,34                         | 97       | 83,62% | 0,32                         | >0,05                           |
| Ερώτηση 3                | 101      | 97,12% | 0,02                         | 107      | 92,24% | 0,36                         | >0,05                           |
| Ερώτηση 4                | 34       | 32,69% | 0,47                         | 90       | 77,59% | 0,41                         | >0,05                           |
| Ερώτηση 5                | 29       | 27,88% | 0,49                         | 41       | 35,34% | 0,42                         | >0,05                           |
| Ερώτηση 6                | 5        | 4,81%  | 0,23                         | 23       | 19,83% | 0,45                         | 0,001                           |
| Ερώτηση 7                | 37       | 35,58% | 0,51                         | 62       | 53,45% | 0,51                         | 0,01                            |
| Ερώτηση 8                | 9        | 8,65%  | 0,17                         | 29       | 25%    | 0,42                         | 0,001                           |
| Ερώτηση 9                | 63       | 60,58% | 0,35                         | 75       | 64,66% | 0,58                         | >0,05                           |
| Ερώτηση 10               | 12       | 11,54% | 0,32                         | 57       | 49,14% | 0,56                         | <0,001                          |
| Ερώτηση 1_3 <sup>ο</sup> | 14       | 13,46% | 0,31                         | 5        | 4,31%  | 0,16                         | 0,028                           |
| Ερώτηση 12               | 3        | 2,88%  | 0,07                         | 10       | 8,62%  | 0,20                         | >0,05                           |
| Ερώτηση 13               | 38       | 36,54% | 0,26                         | 53       | 45,69% | 0,43                         | >0,05                           |
| Ερώτηση 14               | 40       | 38,46% | 0,37                         | 59       | 50,86% | 0,35                         | >0,05                           |
| Ερώτηση 15               | 36       | 34,62% | 0,27                         | 45       | 38,79% | 0,21                         | >0,05                           |

\*Αντιστοιχεί στην παρατηρούμενη στάθμη σημαντικότητας του ελέγχου ανεξαρτησίας του Fisher

Σύμφωνα με τον Πίνακα 2, η ερώτηση 3 (διερεύνηση ικανότητας αναγνώρισης ορθογωνίων παραλληλογράμμων) αναδεικνύεται η ευκολότερη για τους μαθητές του Δημοτικού και του Γυμνασίου, καθώς απαντήθηκε από 101 και 107 μαθητές αντίστοιχα. Για τους μαθητές του Δημοτικού μεγαλύτερη δυσκολία παρουσιάζουν οι ερωτήσεις 12, 6 και 8 (διερεύνηση ικανότητας αναγνώρισης ιδιοτήτων και σχέσεων μεταξύ σχημάτων) και μικρότερη δυσκολία οι ερωτήσεις 3, 2 και 9 (αναγνώριση σχήματος και ιδιοτήτων του τριγώνου). Οι μαθητές του Γυμνασίου απαντούν πιο εύκολα τις ερωτήσεις 3, 2, 4 και 9 ενώ πιο δύσκολα τις ερωτήσεις 1 (τρίτου επιπέδου), 12 και 6. Σημαντικά υψηλότερα ποσοστά επιτυχίας των μαθητών του Γυμνασίου σε σχέση με του Δημοτικού εμφανίζονται στις ερωτήσεις 4 και 10 (μελέτη σχεδιαστικών και λεκτικών ικανοτήτων). Ακόμη, τα ποσοστά της ερώτησης 1 είναι υψηλότερα στους μαθητές του Δημοτικού εν συγκρίσει με αυτούς του Γυμνασίου (43,27% και 25% αντιστοίχως).

Οι χαμηλές επιδόσεις των μαθητών του Γυμνασίου στην ερώτηση 1 θα μπορούσε να αποδοθεί στη σύγχυση που προκαλείται από αυτούς κατά την αναγνώριση του σχήματος του χαρταετού ως ρόμβου, ενδεχομένως εξαιτίας του ότι έχουν έρθει σε επαφή με περισσότερη ύλη και περισσότερες σχετικές εμπειρίες από τους μαθητές του Δημοτικού. Οπότε, θεωρούν ότι το σχήμα του χαρταετού (ή διαμαντιού) είναι ρόμβος, αμελώντας να το συσχετίσουν με τις ιδιότητες που έχει ο ρόμβος.

Σύμφωνα με το δείκτη  $r_{pbis}$ , οι ερωτήσεις με μεγαλύτερο βαθμό διακριτότητας για τα δεδομένα του Δημοτικού είναι οι 4, 5 και 7 (τιμές  $> 0,45$ ), οι δυο πρώτες από τις οποίες μελετούν σχεδιαστικές ικανότητες και η 7 την ικανότητα διάκρισης σχημάτων με βάση τις ιδιότητες τους. Επομένως, οι ερωτήσεις αυτές συσχετίζονται σε μεγαλύτερο βαθμό, σε σχέση με τις υπολοίπες, με τη συνολική επίδοση ενός μαθητή. Αντίθετα, οι τιμές του δείκτη διακριτότητας για τις ερωτήσεις 3, 8 και 12 είναι αρκετά μικρότερες του 0,30 και, κατά συνέπεια, έχουν χαμηλό βαθμό διακριτότητας. Στο Γυμνάσιο προέκυψαν συνολικά υψηλότερες τιμές σε σχέση με το Δημοτικό, κάτι που υποδεικνύει ότι το τεστ είναι καταλληλότερο για την καταγραφή των γνώσεων των μαθητών του Γυμνασίου. Ωστόσο, εξακολουθούν να υπάρχουν ερωτήσεις με χαμηλό βαθμό διακριτότητας, όπως οι ερωτήσεις, 12, 15 (διερεύνηση αντίληψης σχέσεων εγκλεισμού μεταξύ σχημάτων) και η 1 (μελέτη ικανότητας αναγνώρισης του σχήματος του ρόμβου), με τιμές μικρότερες του 0,30.

Από τον έλεγχο ανεξαρτησίας του Fisher, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, οι παρατηρούμενες διαφορές ανάμεσα στο Δημοτικό και στο Γυμνάσιο είναι σημαντικές μόνο για τις ερωτήσεις 1, 6, 7, 8, 10 και 1\_3°, όπου οι τιμές  $p$  της παρατηρούμενης στάθμης σημαντικότητας είναι μικρότερες από 0,05.

Εν συνεχεία, για τη διερεύνηση των επιπέδων Van Hiele στα οποία εντάσσονται οι μαθητές, υιοθετήθηκαν τα ακόλουθα κριτήρια επίδοσης για κάθε μαθητή, ώστε να αποτυπωθεί ο βαθμός 'απόκτησης' κάποιου επιπέδου από αυτόν (Πίνακας 3):

- πολύ ελαστικό 2/5: 2 στις 5 ερωτήσεις του επιπέδου απαντώνται ορθά,
- ελαστικό 3/5: 3 στις 5 ερωτήσεις απαντώνται ορθά,
- αυστηρό 4/5: 4 στις 5 ερωτήσεις απαντώνται ορθά και
- απόλυτο 5/5: 5 στις 5 ερωτήσεις απαντώνται ορθά.

**Πίνακας 3:** Ποσοστά απόκτησης των επιπέδων σε σχέση με κριτήρια αξιολόγησης

| Επίπεδο / κριτήρια |     | Δημοτικό |    | Γυμνάσιο |    |
|--------------------|-----|----------|----|----------|----|
|                    |     | f        | %  | f        | %  |
| <b>Επίπεδο 1</b>   | 5/5 | 7        | 7  | 6        | 5  |
|                    | 4/5 | 27       | 26 | 44       | 38 |
|                    | 3/5 | 59       | 57 | 89       | 77 |
|                    | 2/5 | 94       | 90 | 111      | 96 |
| <b>Επίπεδο 2</b>   | 5/5 | 0        | 0  | 9        | 8  |
|                    | 4/5 | 2        | 2  | 18       | 16 |
|                    | 3/5 | 15       | 14 | 46       | 40 |
|                    | 2/5 | 30       | 29 | 75       | 65 |
| <b>Επίπεδο 3</b>   | 5/5 | 0        | 0  | 0        | 0  |
|                    | 4/5 | 1        | 1  | 1        | 1  |
|                    | 3/5 | 8        | 8  | 21       | 18 |
|                    | 2/5 | 38       | 37 | 55       | 47 |

Από τον Πίνακα 3 προκύπτει ότι, υιοθετώντας το απόλυτο κριτήριο 5/5, δεν ήταν δυνατό να καταταχθούν οι μαθητές και των δύο δειγμάτων σε κάποιο επίπεδο. Αντιθέτως, με το πολύ ελαστικό 2/5 οι μαθητές παρουσιάζονται να έχουν αποκτήσει και τα τρία επίπεδα σε υψηλά ποσοστά και με μεγάλη ευκολία. Με την εφαρμογή του αυστηρού κριτηρίου 4/5 τα ποσοστά πρόσκτησης των επιπέδων 2 και 3 εμφανίζονται σημαντικά χαμηλά, 2% και 1% για το Δημοτικό και 16% και 1% για το Γυμνάσιο αντιστοίχως. Συνεπώς, το ελαστικό κριτήριο 3/5, το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί και σε προηγούμενες έρευνες (π.χ. Τζίφας, 2005), αποδίδει πιο αποδεκτά και αξιοποιήσιμα αποτελέσματα, καθώς θέτει τον 'πύχνη' επίδοσης στις δοκιμασίες που αφορούν το εκάστοτε επίπεδο σε επαρκές αλλά όχι ιδιαίτερα απαιτητικό ύψος.

Πιο συγκεκριμένα, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές του Δημοτικού Σχολείου (57%) και περισσότεροι από τα 2/3 των μαθητών του Γυμνασίου (77%) εμφανίζονται να έχουν αποκτήσει το πρώτο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele. Το επίπεδο 2 έχει αποκτηθεί από το 14% των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και το 40% των μαθητών του Γυμνασίου. Τέλος, 8% και 18% των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου αντιστοίχως έχει 'κατακτήσει' το τρίτο επίπεδο.

Με βάση τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το ελαστικό κριτήριο (3/5) και λαμβάνοντας υπόψη τη διαδοχικότητα των επιπέδων, δηλαδή για να μπορεί ένας

μαθητής να καταταχθεί σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο θα πρέπει να έχει 'κατακτήσει' όλα τα προηγούμενα από αυτό επίπεδα, προκύπτει η τελική κατάταξη των μαθητών σε Επίπεδα Van Hiele όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

**Πίνακας 4:** Κατάταξη των μαθητών ανά επίπεδο, με αναπτυξιακή συνέχεια

|                           | Δημοτικό |     | Γυμνάσιο |     |
|---------------------------|----------|-----|----------|-----|
|                           | f        | %   | f        | %   |
| <b>Επίπεδο 0</b>          | 38       | 36  | 20       | 18  |
| <b>Επίπεδο 1 μόνο</b>     | 43       | 41  | 42       | 36  |
| <b>Επίπεδο 1 και 2</b>    | 10       | 10  | 28       | 24  |
| <b>Επίπεδο 1, 2 και 3</b> | 0        | 0   | 13       | 11  |
| <b>Καμία Κατάταξη</b>     | 13       | 13  | 13       | 11  |
| <b>Σύνολο</b>             | 104      | 100 | 116      | 100 |

Σύμφωνα με τον Πίνακα 4, 36% των μαθητών του Δημοτικού και 18% του Γυμνασίου δεν έχει αποκτήσει κανένα επίπεδο και επομένως κατατάσσεται στο επίπεδο 0. Στο επίπεδο 1 κατατάσσεται το 41% και το 36% των μαθητών του Δημοτικού και του Γυμνασίου αντίστοιχα. Στο επίπεδο 2 κατατάσσονται το 10% των μαθητών του Δημοτικού και το 24% αυτών του Γυμνασίου. Ακόμη, κανένας μαθητής του Δημοτικού και 11% των μαθητών του Γυμνασίου εντάσσονται στο επίπεδο 3. Τέλος, 13% των μαθητών του Δημοτικού και 11% του Γυμνασίου δεν έγινε δυνατό να ενταχθούν σε κάποιο επίπεδο.

Σε ορισμένες ερωτήσεις ζητήθηκε από τους μαθητές να αιτιολογήσουν τις απαντήσεις τους, με σκοπό να αποτυπωθούν ενδεικτικά ορισμένα από τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής σκέψης τους. Παρακάτω παρουσιάζονται χαρακτηριστικές απόψεις των μαθητών που προέκυψαν από την ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων.

Στην ερώτηση 10 σχεδόν όλοι οι μαθητές του Δημοτικού και οι μισοί του Γυμνασίου που απάντησαν αντί της λέξης «κορυφή» χρησιμοποίησαν τη λέξη «γωνία» και αντί της λέξης «πλευρά» τη λέξη «γραμμή». Στην ερώτηση 11 σχεδόν οι μισοί μαθητές του δείγματος, συγκρίνοντας το τετράγωνο και το ορθογώνιο, ανέφεραν ως ομοιότητες το γεγονός ότι έχουν 4 πλευρές, 4 ορθές γωνίες, απέναντι πλευρές ίσες και ίσες διαγώνιες και ως διαφορές ότι το τετράγωνο έχει και τις 4 πλευρές ίσες, ενώ το ορθογώνιο μόνο τις απέναντι. Ακόμη, ότι έχουν διαφορετικούς άξονες συμμετρίας και

διαγωνίες. Επιπλέον, κάποιιοι ανέφεραν ως διαφορά ότι το ορθογώνιο είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο. Στην έκτη ερώτηση φάνηκε ότι υπήρχε σύγχυση μεταξύ καθετότητας και κατακόρυφου. Χαρακτηριστική ήταν η απάντηση ενός μαθητή ότι «το ΚΝ και το ΛΜ (πλευρές τετραγώνου) είναι κάθετα επειδή δεν είναι ούτε οριζόντια ούτε διαγώνια». Τέλος, στην ερώτηση 4 σχεδόν οι μισοί μαθητές του Δημοτικού δεν κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά τα σχήματα. Το χαρακτηριστικότερο λάθος ήταν ότι 'γέμιζαν' όλο το σχήμα.

#### 4. Συζήτηση και Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα επιδιώξαμε να μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής σκέψης των τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου, καθώς και το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele στο οποίο αυτοί κατατάσσονται. Στην παρούσα ενότητα συζητούνται τα αποτελέσματα της έρευνας κατά Ερευνητικό Ερώτημα σε συνδυασμό με τα αντίστοιχα βιβλιογραφικά δεδομένα.

Για το πρώτο ερευνητικό ερώτημα, αναφορικά με τα χαρακτηριστικά της γεωμετρικής σκέψης, από τις απαντήσεις των μαθητών του Δημοτικού Σχολείου προκύπτει ότι σχεδόν όλοι ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν τα σχήματα από τη φυσική τους εμφάνιση, ως ολότητες. Δυσκολία παρατηρήθηκε όταν το σχήμα δεν παρουσιάζεται στη «συνηθισμένη» θέση. Οι μισοί μαθητές του Δημοτικού Σχολείου δεν κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά τα σχήματα, με χαρακτηριστικότερο λάθος το 'γέμισμα' όλου του σχήματος. Ακόμη, στο σχεδιασμό του τετραγώνου και του ρόμβου αρκετοί μαθητές δεν έλαβαν υπόψη τις ιδιότητές τους, συγκεκριμένα ότι οι πλευρές τους είναι ίσες.

Σχετικά με τις ιδιότητες των σχημάτων, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές του Δημοτικού Σχολείου δυσκολεύτηκαν να τις αναγνωρίσουν. Η μεγαλύτερη δυσκολία παρατηρήθηκε στη διάκριση των ιδιοτήτων του ρόμβου. Επίσης εμφανίστηκε αδυναμία στην αναγνώριση της ιδιότητας «δύο διαδοχικές πλευρές ίσες», πιθανόν λόγω της μη κατανόησης του όρου «διαδοχικές». Όπως και σε προηγούμενες έρευνες (Vinner & Hershkowitz, 1980), παρατηρήθηκε και εδώ σύγχυση μεταξύ καθετότητας και κατακόρυφου. Παρά ταύτα, δεν καταγράφηκαν ιδιαίτερες δυσκολίες στην αναγνώριση των ιδιοτήτων του τριγώνου.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η δυσκολία των μαθητών με τη μαθηματική ορολογία. Αντί της λέξης «κορυφή» έτειναν να χρησιμοποιούν τη λέξη «γωνία» και αντί της λέξης «πλευρά», τη λέξη «γραμμή». Αυτό ίσως να οφείλεται στην περιορισμένη έμφαση που δίνεται στο σχολείο στην ακριβή χρήση των μαθηματικών όρων σε συνδυασμό με τη χαμηλού έως μέτριου επιπέδου κατανόηση των αντίστοιχων ιδιοτήτων των σχημάτων. Συχνά στη βιβλιογραφία επισημαίνεται η 'ρηχή' διδασκαλία της Γεωμετρίας στην υποχρεωτική εκπαίδευση (π.χ., Κολέζα και Ντζιαχρήστος, 1990). Ο

Van de Walle (2005) αναφέρει ότι οι περισσότεροι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αφιερώνουν ελάχιστο χρόνο για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Αυτό μπορεί να συμβαίνει είτε γιατί δεν αισθάνονται οι ίδιοι άνετα με αυτήν είτε γιατί αδυνατούν να αναγνωρίσουν την αξία της για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.

Τόσο τα αποτελέσματα της έρευνας όσο και η σχετική βιβλιογραφία επιβεβαιώνουν τη δυσκολία των μαθητών να εντοπίσουν κοινές ιδιότητες των σχημάτων. Ειδικότερα, οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν σχέσεις εγκλεισμού και, κατά τη σύγκριση δύο σχημάτων, χρησιμοποιούν συνήθως μία ιδιότητα. Ακόμη, πολλοί θεωρούν ότι «το τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο, επειδή το ορθογώνιο είναι μεγαλύτερο». Η αδυναμία κατανόησης των σχέσεων μεταξύ σχημάτων αποτυπώνεται και στην άποψη αρκετών μαθητών του συγκεκριμένου δείγματος ότι κανένα σχήμα δεν έχει ίδιες ιδιότητες με κάποιο άλλο. Ωστόσο, ένα μικρό ποσοστό των μαθητών ήταν σε θέση να αναγνωρίσουν ότι υπάρχουν κάποιες σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, συγκεκριμένα, ότι τα ορθογώνια και τα παραλληλόγραμμα έχουν τις ίδιες ιδιότητες.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, τα χαρακτηριστικά που διέπουν τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών του *Γυμνασίου* είναι παρόμοια με αυτά των μαθητών του *Δημοτικού Σχολείου*. Ωστόσο, υπάρχουν κάποιες διαφοροποιήσεις, οι οποίες συζητούνται στη συνέχεια.

Αναφορικά με την ικανότητα αναγνώρισης σχημάτων, περισσότεροι από τα 2/3 των μαθητών του *Γυμνασίου* διέκριναν τα σχήματα όχι απλώς από τη μορφή τους αλλά παραθέτοντας συγχρόνως και τα χαρακτηριστικά τους. Κι εδώ ένα μικρό ποσοστό δυσκολεύτηκε στην αναγνώριση ενός σχήματος σε θέση διαφορετική από τη «συνηθισμένη». Ακόμη, ικανοποιητικός αριθμός των μαθητών του *Γυμνασίου* ήταν σε θέση να σχεδιάσουν σωστά τα σχήματα. Επιπρόσθετα, το 1/3 του συγκεκριμένου δείγματος παρουσίασε δυσκολία στο να εκφράσει λεκτικά τα χαρακτηριστικά των σχημάτων. Τέλος, οι μαθητές αυτής της ομάδας παρουσίασαν μεγαλύτερη ευχέρεια στην κατανόηση σχέσεων εγκλεισμού από τους μαθητές του *Δημοτικού*. Χαρακτηριστική σε αυτήν την κατεύθυνση είναι η άποψη ενός μαθητή ότι «το τετράγωνο και το ορθογώνιο έχουν τις ίδιες ιδιότητες, επειδή το τετράγωνο είναι από μόνο του ορθογώνιο».

Όσον αφορά το *δεύτερο ερευνητικό ερώτημα*, με βάση τη θεωρία Van Hiele, τα επίπεδα είναι διαδοχικά. Δηλαδή, για να μπορεί ένας μαθητής να καταταχθεί σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο θα πρέπει να έχει αποκτήσει όλα τα προηγούμενα. Με βάση αυτήν την προσέγγιση, η ανάλυση των δεδομένων έδειξε ότι:

- Το ένα τρίτο των τελειόφοιτων μαθητών του *Δημοτικού Σχολείου* δεν είχαν κατακτήσει κανένα από τα επίπεδα 1, 2, και 3.
- Στο επίπεδο 1 κατατάσσεται το 37% και το 36% των μαθητών του *Δημοτικού Σχολείου* και του *Γυμνασίου* αντιστοίχως.

- Στο επίπεδο 2 κατατάσσεται μόνο το 9% των μαθητών του Δημοτικού και το 24% του Γυμνασίου.
- Στο επίπεδο 3 δεν εντάσσεται κανένας μαθητής του Δημοτικού και 11% των μαθητών του Γυμνασίου.
- Τέλος, 13% των μαθητών του Δημοτικού και 11% του Γυμνασίου δεν ήταν δυνατό να καταταχθεί σε κανένα επίπεδο.

Τα παραπάνω ευρήματα παρουσιάζουν ενδιαφέρον, γιατί ήδη από την Δ' τάξη οι μαθητές αναμένεται να έχουν κατακτήσει το επίπεδο 1, ενώ οι δραστηριότητες των σχολικών εγχειριδίων της ΣΤ' τάξης προσμένουν από τους μαθητές να έχουν αποκτήσει χαρακτηριστικά γεωμετρικής σκέψης 2<sup>ου</sup> και 3<sup>ου</sup> επιπέδου. Επιπλέον, το ποσοστό των μαθητών του Γυμνασίου που έχει κατακτήσει το 3<sup>ο</sup> επίπεδο δεν είναι το αναμενόμενο, παρά το γεγονός ότι τα σχολικά εγχειρίδια αυτής της τάξης επεξεργάζονται ήδη έννοιες και χαρακτηριστικά 3<sup>ου</sup> επιπέδου γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele (ΦΕΚ Β'2281 03-10-2011). Τέλος, η αδυναμία ένταξης ορισμένων μαθητών σε κάποιο επίπεδο μπορεί να αποδοθεί σε χαρακτηριστικά του μοντέλου van Hiele, και ειδικότερα στην απαίτηση, για να καταταχθεί ένας μαθητής σε κάποιο επίπεδο, να πρέπει να έχει κατακτήσει όλα τα προηγούμενα. Επιπροσθέτως, σε ανεπάρκειες του ερευνητικού εργαλείου καθώς και σε άλλους παράγοντες, όπως στην απροσεξία του μαθητή κατά τη συμπλήρωση κάποιων ερωτήσεων κτλ.

Επιχειρώντας να ερμηνεύσουμε τα παραπάνω ευρήματα θα λέγαμε ότι η αδυναμία των μαθητών να βρίσκονται στο κατάλληλο επίπεδο ίσως να οφείλεται στη μεθόδευση της διδασκαλίας, η οποία δεν παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να αναστοχάζονται τις γεωμετρικές ιδέες σε ένα περιβάλλον που επιμένει στην απλή απομνημόνευση κανόνων και ορισμών, χωρίς την απαίτηση για ουσιαστική κατανόηση των εννοιών. Επιπλέον, τόσο τα σχολικά εγχειρίδια όσο και η διδασκαλία στην τάξη υιοθετούν πρακτικές που συμβάλλουν στις δυσκολίες των μαθητών που κατέγραψε η παρούσα έρευνα. Τέτοιες πρακτικές είναι η τάση ταύτισης κατακορύφου και καθέτου, η απουσία σαφούς λεκτικής περιγραφής βασικών γεωμετρικών εννοιών στο Δημοτικό Σχολείο και η ελλιπής επεξεργασία των σχέσεων εγκλεισμού στο σύνολο των τετράπλευρων, οι οποίες ερμηνεύουν σε τουλάχιστον κάποιο βαθμό τις αντίστοιχες δυσκολίες των μαθητών του δείγματος.

Εν κατακλείδι, αν και το δείγμα μας είναι σχετικά μικρό, τα ευρήματα της παρούσας έρευνας είναι σύμφωνα με αυτά προηγούμενων σχετικών ερευνών (Usiskin, 1982, Τζίφας, 2005, Σαλονικιάς, 2008, Δημάκος & Νικολουδάκης, 2009), τα οποία, επομένως, ισχυροποιούν.

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα, προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα ανά ερευνητικό ερώτημα:



**1° Ερευνητικό Ερώτημα:** Τα βασικά χαρακτηριστικά που διέπουν τη γεωμετρική σκέψη των τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου είναι ότι οι μαθητές:

- αναγνωρίζουν με ευχέρεια τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα,
- διακρίνουν τα σχήματα με βάση τις ιδιότητες τους (κυρίως οι μαθητές του Γυμνασίου),
- παρουσιάζουν αδυναμίες στις λεκτικές και σχεδιαστικές ικανότητες και
- εκδηλώνουν μεγαλύτερη δυσκολία στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των σχημάτων.

**2° Ερευνητικό Ερώτημα:** Η πλειονότητα των τελειόφοιτων μαθητών του Δημοτικού Σχολείου και του Γυμνασίου κατατάσσονται στο πρώτο και δεύτερο επίπεδο Van Hiele. Ωστόσο, οι επιδόσεις των μαθητών του Γυμνασίου είναι ελαφρώς υψηλότερες. Ειδικότερα, μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών του Γυμνασίου, σε σχέση με αυτό του Δημοτικού Σχολείου, κατατάσσονται στο δεύτερο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης κατά Van Hiele. Επίσης, κανένας μαθητής της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δεν κατατάσσεται στο τρίτο επίπεδο, ενώ αυτό συμβαίνει για ένα μικρό ποσοστό των μαθητών του Γυμνασίου.

Το ενδιαφέρον των ευρημάτων της παρούσας έρευνας συνηγορεί στην επέκτασή της σε ένα μεγαλύτερο και πιο αντιπροσωπευτικό δείγμα που θα μπορούσε να προσφέρει πιο έγκυρα και αξιόπιστα συμπεράσματα, ενδεχομένως γενικεύσιμα σε όλο τον πληθυσμό. Σε μια τέτοια περίπτωση, θα ήταν σημαντική η προσεκτική εξέταση ορισμένων ερωτήσεων - δοκιμασιών. Για παράδειγμα, παρά το γεγονός ότι κάποιες ερωτήσεις του συγκεκριμένου τεστ εμφανίζονται να έχουν σχετικά μικρές τιμές του δείκτη  $r_{pbis}$  (Πίνακας 2) και ενδεχομένως να μην μπορούν να συμβάλλουν σε μεγάλο βαθμό στην πρόβλεψη της συνολικής επίδοσης (επηρεάζοντας την αξιοπιστία), αποφασίστηκε να συμπεριληφθούν στο ερευνητικό εργαλείο, καθώς αναδεικνύουν σημαντικές δυσκολίες στον τρόπο γεωμετρικής σκέψης των μαθητών. Όπως για παράδειγμα η ερώτηση 1 που φανερώνει σημαντική σύγχυση των μαθητών του Γυμνασίου στην αναγνώριση του σχήματος του ρόμβου. Ωστόσο, παρόμοιες ερωτήσεις θα μπορούσαν να βελτιωθούν σε μελλοντική έρευνα ώστε να επιτευχθεί μεγαλύτερου βαθμού αξιοπιστία. Τέλος, θα ήταν ενδιαφέρουσα η μελέτη της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και υπό το πρίσμα άλλων προσεγγίσεων, πέραν αυτής των Van Hiele, ώστε να ελεγχθεί η εμβελειά της.

## Σημειώσεις































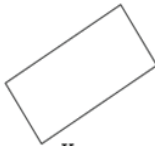



1. Στην παρούσα εργασία έχει υιοθετηθεί η αριθμηση των επιπέδων από το επίπεδο 1 μέχρι 5. Η αρχική αριθμηση από τους Van Hiele, δηλαδή από το επίπεδο 0 μέχρι 4, έχει αμφισβητηθεί από πολλούς ερευνητές.

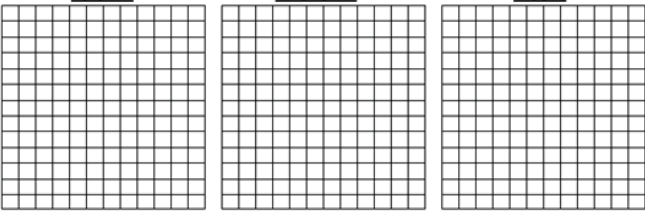
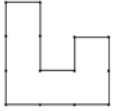
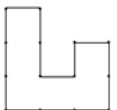
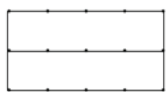
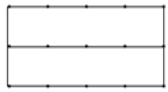
## Βιβλιογραφία

- Burger, W. & Shaughnessy, M. (1986) Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1): 31-48.
- Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2008) *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας*. Αθήνα: Εκδόσεις Μεταίχμιο.
- Crocker, L. & Algina, J. (1986) *Introduction to classical and modern test theory*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988) The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 3: 1-196. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gutierrez, A. & Jaime, A. (1998) On the assessment of the van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20 (2-3): 27-46.
- Gutierrez, A., Jaime, A. & Fortuny, J.M. (1991) An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (3): 237-251.
- Gutierrez, A., Jaime, A., Burger, W.F. & Shaughnessy, J.M. (1991) A Comparative Analysis of Two Ways of Assessing the van Hiele Levels of Thinking. In F. Furingetti (Ed.), *Proceedings of the fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 109-116. Assisi, Italy: PME.
- Hoffer, A. (1986) Geometry and visual thinking. In T.R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods*, 233-261. Newton, MA: Allyn and Bacon.
- Usiskin, Z. (1982) *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry (Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project)*. Chicago: University of Chicago, Department of Education. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 288)
- Van de Walle, J.A. (2005) *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική Διδασκαλία* Αθήνα: τυπωθήτω-ΓΙΩΡΓΟΣ ΔΑΡΔΑΝΟΣ, 423-484.
- Van Hiele, P.M. (1986) *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.


















- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980) Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceeding of the fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 177-184. Berkley, CA: University of California.
- Wirszup, I. (1976) Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. In J.L. Martin & D.A. Bradbard (Eds.), *Space and geometry: Papers from a research workshop*, 75-97. Columbus, OH: ERIC Center for Science, Mathematics and Environmental Education.
- Δημάκος, Γ. & Νικολουδάκης, Ε. (2009) Η διδασκαλία της γεωμετρίας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση με χρήση της θεωρίας των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης του Van Hiele και την βοήθεια των Τ.Π.Ε. στα πλαίσια της συνεργατικής μάθησης. Στο *Πρακτικά 5ης Διεθνούς Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, τόμ. 1, 179-194. Ρέθυμνο: Πανεπιστήμιο Κρήτης, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.
- Ζάχος, Ι. (2000) *Αξιολόγηση του επιπέδου Γεωμετρικής σκέψης van Hiele των μαθητών της Β' τάξης του Λυκείου*. Αθήνα: Gutenberg.
- Κολέζα, Ε. (2000) *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών*. Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books.
- Κολέζα, Ε. & Ντζιαχρήστος, Β. (1990) Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στα σχολεία: Επίπεδα P. M. van Hiele. *Μαθηματική Επιθεώρηση*, 37: 11-23.
- Κοντογιάννης, Δ. & Ντζιαχρήστος, Β. (1999) *Βασικές έννοιες της Γεωμετρίας*. Αθήνα: (εκδ. συγγρ.) (3<sup>η</sup> έκδοση).
- Σαλονικιός, Δ. (2008) *Τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και οι ιδιότητές τους στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού σχολείου. Ανάλυση με βάση τη θεωρία van Hiele για τη γεωμετρική σκέψη*. Διπλωματική Εργασία. Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης.
- Τζίφας, Ν. (2005) *Η αξιολόγηση της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης: Επίπεδα van Hiele και διδακτικές προσεγγίσεις με χρήση λογισμικού*. Διπλωματική εργασία Διαπανεπιστημιακού – Διατμηματικού Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών με τίτλο «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών». Αθήνα: Πανεπιστήμια Αθηνών και Κύπρου.
- Τουμάσης, Χ. (2002) *Σύγχρονη Διδακτική των μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.
- Τριανταφυλλίδης, Τ. (2005) *Βασικές μαθηματικές έννοιες για τον εκπ/κό της Α/θμιας εκπ/σης*. Αθήνα: Τυπωθήτω - Γ. Δαρδάνος.



**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:** Παρουσίαση και περιγραφή ερευνητικού εργαλείου

|   |  | Ερωτήσεις   | Περιγραφή   |   |   |   |   |              |  |  |  |  |                   |                  |  |  |  |  |  |  |
|---|--|---|---|---|---|---|---|--------------|--|--|--|--|-------------------|------------------|--|--|--|--|--|--|
| <b>1<sup>ο</sup> ΕΠΙΠΕΔΟ</b>  | <p><b>Ερώτηση 1</b><br/>Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι <b>ρόμβοι</b>; (βάλε ✓ στο σωστό κελί - κουτάκι)</p> <table border="1"> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Είναι ρόμβος</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Δεν είναι ρόμβος</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει ο μαθητής τουλάχιστον 1 από τα 3 σχήματα που είναι ρόμβος και να μην έχει επιλέξει κανένα από αυτά που δεν είναι ρόμβοι.</p> <p>Ορθή απάντηση για 3<sup>ο</sup> επίπεδο: Να έχει επιλέξει και τα 3 σχήματα που είναι ρόμβοι και συγχρόνως να μην έχει επιλέξει κανένα από αυτά που δεν είναι.</p> |   |  |  |  |  |  | Είναι ρόμβος |  |  |  |  |                   | Δεν είναι ρόμβος |  |  |  |  |  | <p>Εξετάζεται κατά πόσο οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν το σχήμα του ρόμβου. Επιπλέον, αν έχουν αναπτύξει την έννοια του εγκλεισμού, δηλαδή αν μπορούν να διακρίνουν σχέσεις μεταξύ σχημάτων, στη συγκεκριμένη περίπτωση του τετραγώνου και του ρόμβου.</p> |
|   |  |  |  |  |  |  |   |              |  |  |  |  |                   |                  |  |  |  |  |  |  |
|   | Είναι ρόμβος   |   |   |   |   |   |   |              |  |  |  |  |                   |                  |  |  |  |  |  |  |
| Δεν είναι ρόμβος  |  |   |   |   |   |   |   |              |  |  |  |  |                   |                  |  |  |  |  |  |  |
| <p><b>Ερώτηση 2</b><br/>Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι <b>τρίγωνα</b>; (βάλε ✓ στο σωστό κελί - κουτάκι)</p> <table border="1"> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Είναι τρίγωνο</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Δεν είναι τρίγωνο</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>Για όσα σχήματα επέλεξες ότι δεν είναι τρίγωνα, μπορείς να εξηγήσεις με συντομία γιατί;</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει τουλάχιστον 1 από τα 2 σχήματα που είναι τρίγωνα και να μην έχει επιλέξει κανένα από αυτά που δεν είναι.</p> |  |  |  |  |  |  | Είναι τρίγωνο   |              |  |  |  |  | Δεν είναι τρίγωνο |                  |  |  |  |  | <p>Εξετάζεται αν οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν το σχήμα του τριγώνου από όμοιά του.</p> |  |
|   |   |  |  |  |  |   |   |              |  |  |  |  |                   |                  |  |  |  |  |  |  |
| Είναι τρίγωνο   |  |   |   |   |   |   |   |              |  |  |  |  |                   |                  |  |  |  |  |  |  |
| Δεν είναι τρίγωνο   |  |   |   |   |   |   |   |              |  |  |  |  |                   |                  |  |  |  |  |  |  |
| <p><b>Ερώτηση 3</b><br/>Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι <b>ορθογώνια παραλληλόγραμμα</b>; (κύκλωσε τα σωστά γράμματα)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"><br/>Κ</div> <div style="text-align: center;"><br/>Λ</div> <div style="text-align: center;"><br/>Μ</div> <div style="text-align: center;"><br/>Ν</div> </div> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει τουλάχιστον 1 από τα 3 σχήματα που είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα και να μην έχει επιλέξει το σχήμα που δεν είναι.</p>   | <p>Διερευνάται η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα.</p>   |   |   |   |   |   |   |              |  |  |  |  |                   |                  |  |  |  |  |  |  |







|                        |  | Ερωτήσεις   | Περιγραφή  |
|------------------------|--|---|--|
| 1 <sup>ο</sup> ΕΠΙΠΕΔΟ |  | <p><b>Ερώτηση 4</b></p> <p>Να σχεδιάσεις ένα <b>τρίγωνο</b>, ένα <b>τετράγωνο</b>, και έναν <b>ρόμβο</b> στο αντίστοιχο πλαίσιο</p> <p style="text-align: center;"><b>Τρίγωνο</b>                      <b>Τετράγωνο</b>                      <b>Ρόμβος</b></p>  <p>Ορθή απάντηση: Να έχει σχεδιάσει ορθά τουλάχιστον τα 2 από τα 3 σχήματα.</p>  | Διερευνώνται οι σχεδιαστικές ικανότητες των μαθητών.   |
|                        |  | <p><b>Ερώτηση 5</b></p> <p>a. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός από ίσα ορθογώνια παραλ/μα που μπορεί να χωριστεί το παρακάτω σχήμα; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος;</p> <p>Ο μικρότερος αριθμός από ορθογώνια  Ο μικρότερος αριθμός είναι: _____</p> <p>Ο μεγαλύτερος αριθμός από ορθογώνια  Ο μεγαλύτερος αριθμός είναι: _____</p> <p>b. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός από ίσα τρίγωνα που μπορεί να χωριστεί το παρακάτω σχήμα; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος;</p> <p>Ο μικρότερος αριθμός από τρίγωνα  Ο μικρότερος αριθμός είναι: _____</p> <p>Ο μεγαλύτερος αριθμός από τρίγωνα  Ο μεγαλύτερος αριθμός είναι: _____</p> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει χωρίσει με σωστό τρόπο τουλάχιστον 2 από τα 4 σχήματα.</p> | Διερευνάται η ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίσουν απλά επίπεδα σχήματα ως συνδυασμό άλλων επίπεδων σχημάτων. |
| 2 <sup>ο</sup> ΕΠΙΠΕΔΟ |  | <p><b>Ερώτηση 6</b></p> <p>Το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο. Ποια σχέση είναι αληθής για όλα τα τετράγωνα; (κύκλωσε το σωστό γράμμα)</p> <p>a. Το ΚΜ και το ΜΝ έχουν το ίδιο μήκος.<br/> b. Το ΚΜ και το ΛΝ είναι κάθετα.<br/> c. Το ΚΝ και το ΛΜ είναι κάθετα.<br/> d. Το ΚΝ και το ΚΜ έχουν το ίδιο μήκος.<br/> e. Η γωνία Λ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία Μ.</p> <p>Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.</p> <hr/> <hr/> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει μόνο τη σωστή απάντηση (το b).</p>  | Εξετάζονται οι γνώσεις των μαθητών αναφορικά με τις ιδιότητες των σχημάτων και, συγκεκριμένα, του τετραγώνου.  |

2<sup>ο</sup> ΕΠΙΠΕΔΟ

| Ερωτήσεις   |   |   |   |   |   | Περιγραφή   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
|---|---|---|---|---|---|---|-------------|-----------|--------------------------------------|-----------|--------|--|---|---|---|---|---|-------------------------------|--|--|---|--|--|-----------------------------|--|--|--|--|--|----------------------|--|--|--|--|--|----------------------|--|--|--|--|--|----------------------|--|--|--|--|--|---------------------------------|--|--|--|--|--|---|
| <p><b>Ερώτηση 7</b></p> <p>Στον παρακάτω πίνακα βάλε ένα ✓ κάθε φορά που το σχήμα έχει την αντίστοιχη ιδιότητα:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Ιδιότητα</th> <th>Τετράπλευρα</th> <th>Παράλληλα</th> <th>Ορθογώνια</th> <th>Τετράγωνα</th> <th>Ρόμβοι</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Τέσσερις (4) πλευρές</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Απέναντι πλευρές παράλληλες</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Απέναντι γωνίες ίσες</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Όλες οι πλευρές ίσες</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Όλες οι γωνίες ορθές</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Δύο (2) διαδοχικές πλευρές ίσες</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει τις ιδιότητες που ισχύουν για κάθε σχήμα και να μην έχει επιλέξει αυτές που δεν ισχύουν. Σε αυτήν την κατεύθυνση, ο μαθητής θα πρέπει να έχει επιλέξει τις σωστές ιδιότητες για τουλάχιστον 2 από τα 5 σχήματα.</p> |   |   |   |   |   | Ιδιότητα  | Τετράπλευρα | Παράλληλα | Ορθογώνια                            | Τετράγωνα | Ρόμβοι |  |  |  |  |  |  | Τέσσερις (4) πλευρές          |  |  |   |  |  | Απέναντι πλευρές παράλληλες |  |  |  |  |  | Απέναντι γωνίες ίσες |  |  |  |  |  | Όλες οι πλευρές ίσες |  |  |  |  |  | Όλες οι γωνίες ορθές |  |  |  |  |  | Δύο (2) διαδοχικές πλευρές ίσες |  |  |  |  |  | <p>Εξετάζεται κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να διακρίνουν τα τετράπλευρα με βάση τις ιδιότητές τους.</p> |
| Ιδιότητα  | Τετράπλευρα   | Παράλληλα   | Ορθογώνια   | Τετράγωνα   | Ρόμβοι  |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
|   |  |  |  |  |  |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| Τέσσερις (4) πλευρές  |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| Απέναντι πλευρές παράλληλες   |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| Απέναντι γωνίες ίσες  |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| Όλες οι πλευρές ίσες  |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| Όλες οι γωνίες ορθές  |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| Δύο (2) διαδοχικές πλευρές ίσες   |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| <p><b>Ερώτηση 8</b></p> <p>Τα παρακάτω σχήματα είναι <b>ρόμβοι</b>. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι αληθείς και ποιες λανθασμένες γι' αυτού του είδους τα σχήματα;</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  </div> <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Σωστό</th> <th>Λάθος</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3. Οι διαγώνιες του είναι κάθετες.</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4. Όλες οι γωνίες είναι ίσες.</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει χαρακτηρίσει ορθά (Σωστό ή Λάθος) και τις 4 προτάσεις.</p>  |   |   |   |   |   |   | Σωστό       | Λάθος     | 1. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος. |           |        | 2. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. |   |   | 3. Οι διαγώνιες του είναι κάθετες.  |   |   | 4. Όλες οι γωνίες είναι ίσες. |  |  | <p>Διερευνώνται οι γνώσεις των μαθητών αναφορικά με τις ιδιότητες των σχημάτων και συγκεκριμένα του ρόμβου.</p> |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
|   | Σωστό   | Λάθος   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| 1. Οι διαγώνιες έχουν το ίδιο μήκος.  |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| 2. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.  |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| 3. Οι διαγώνιες του είναι κάθετες.  |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| 4. Όλες οι γωνίες είναι ίσες.   |   |   |   |   |   |   |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |
| <p><b>Ερώτηση 9</b></p> <p>Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς σε κάθε <b>ισοσκελές τρίγωνο</b>; (κύκλωσε το σωστό γράμμα)</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Οι τρεις πλευρές έχουν το ίδιο μήκος.</li> <li>Μια πλευρά είναι διπλάσια σε μήκος από κάποια άλλη.</li> <li>Υπάρχουν τουλάχιστον δύο γωνίες με το ίδιο μέτρο.</li> <li>Οι τρεις γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο.</li> </ol> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;">  </div> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει μόνο τη σωστή απάντηση (το c).</p>  |   |   |   |   |   | <p>Εξετάζονται οι γνώσεις των μαθητών αναφορικά με τις ιδιότητες των σχημάτων και, συγκεκριμένα, του ισοσκελούς τριγώνου.</p> |             |           |                                      |           |        |  |   |   |   |   |   |                               |  |  |   |  |  |                             |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                      |  |  |  |  |  |                                 |  |  |  |  |  |   |

|                        | Ερωτήσεις  | Περιγραφή   |
|------------------------|--|---|
| 2 <sup>ο</sup> ΕΠΙΠΕΔΟ | <p><b>Ερώτηση 10</b></p> <p>Στο διπλανό τετραγωνισμένο χαρτί:</p> <p>a. Σχεδίασε ένα <b>τετράγωνο</b>.</p> <p>b. Βάλε στις «μύτες» του τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ, ακολουθώντας τη φορά των δεικτών του ρολογιού.</p> <p>c. Χάραξε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΒΔ</p> <p>d. Πώς λέγονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ του τετραγώνου που σχεδίασες;.....</p> <p>e. Πώς λέγονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του τετραγώνου;.....</p> <p>f. Πώς λέγονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ του τετραγώνου;.....</p> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει απάντηση σωστά σε τουλάχιστον 4 από τα 6 υπο-ερωτήματα.</p>  | <p>Διερευνάται η σχεδιαστική και λεκτική ικανότητα των μαθητών σχετικά με τις ιδιότητες των σχημάτων. Πιο συγκεκριμένα ζητείται να σχεδιάσουν ένα τετράγωνο και να ονομάσουν τις κορυφές, τις πλευρές και τις διαγώνιους.</p> |
| 3 <sup>ο</sup> ΕΠΙΠΕΔΟ | <p><b>Ερώτηση 11</b></p> <p>Να συγκρίνεις τα παρακάτω γεωμετρικά σχήματα. Ποιες είναι οι <b>ομοιότητες</b> και ποιες οι <b>διαφορές</b> τους; Για τις συγκρίσεις σου χρησιμοποίησε χαρακτηριστικά, όπως <b>πλευρές, γωνίες, διαγώνιοι και άξονες συμμετρίας</b>.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p><b>Τετράγωνο</b></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><b>Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο</b></p> </div> </div> <p>Ομοιότητες: _____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>Διαφορές: _____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> | <p>Η ερώτηση 11 διερευνά την ικανότητα των μαθητών να εντοπίζουν σχέσεις μεταξύ δύο σχημάτων (αξιοποιήθηκε αποκλειστικά για την παροχή ποιοτικών δεδομένων).</p>  |
|                        | <p><b>Ερώτηση 12</b></p> <p>Ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής; (κύκλωσε το σωστό γράμμα)</p> <p>a. Όλες οι ιδιότητες των ορθογώνιων είναι ιδιότητες των τετραγώνων.</p> <p>b. Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των ορθογώνιων.</p> <p>c. Όλες οι ιδιότητες των ορθογώνιων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων.</p> <p>d. Όλες οι ιδιότητες των τετραγώνων είναι ιδιότητες των παραλληλογράμμων.</p> <p>e. Καμία από τις παραπάνω δεν είναι σωστή.</p> <p><b>Πώς το ξέρεις;</b> _____</p> <p>_____</p> <p>_____</p> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει μόνο τη σωστή απάντηση (το α).</p>   | <p>Εξετάζονται οι γνώσεις των μαθητών αναφορικά με την έννοια του εγκλεισμού και των σχέσεων μεταξύ σχημάτων.</p>   |



| Ερωτήσεις  | Περιγραφή  |                          |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
|--|--|--------------------------|---------------------------------|--|--------------------------|--------------------------|---|--------------------------|--------------------------------|---|--------------------------|--------------------------|---|--------------------------|--------------------------|--|--------------------------|--------------------------|---|--------------------------|--------------------------|---|
| <p><b>Ερώτηση 13</b><br/>                     Να σημειώσεις δίπλα από τις παρακάτω προτάσεις αν αυτό που λένε είναι «Σωστό» ή «Λάθος».</p> <table border="0" style="width: 100%;"> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;"><b>Σωστό</b></td> <td style="text-align: center;"><b>Λάθος</b></td> </tr> <tr> <td>a. Όλα τα τετράγωνα είναι και ορθογώνια παραλληλόγραμμα.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>b. Όλα τα ισοσκελή τρίγωνα είναι και ισόπλευρα.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>c. Όλα τα τραπέζια είναι παραλληλόγραμμα.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>d. Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμα.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>e. Όλα τα τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>f. Όλα τα τετράγωνα έχουν τις ιδιότητες του ρόμβου.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </table> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει χαρακτηρίσει ορθά (Σωστό ή Λάθος) τουλάχιστον τις 4 από τις 6 προτάσεις.</p> |  | <b>Σωστό</b>             | <b>Λάθος</b>                    | a. Όλα τα τετράγωνα είναι και ορθογώνια παραλληλόγραμμα. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | b. Όλα τα ισοσκελή τρίγωνα είναι και ισόπλευρα. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>       | c. Όλα τα τραπέζια είναι παραλληλόγραμμα. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | d. Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμα.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | e. Όλα τα τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | f. Όλα τα τετράγωνα έχουν τις ιδιότητες του ρόμβου. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <p>Εξετάζονται οι γνώσεις των μαθητών αναφορικά με την έννοια του εγκλεισμού και των σχέσεων μεταξύ σχημάτων.</p> |
|  | <b>Σωστό</b>   | <b>Λάθος</b>             |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| a. Όλα τα τετράγωνα είναι και ορθογώνια παραλληλόγραμμα.   | <input type="checkbox"/>   | <input type="checkbox"/> |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| b. Όλα τα ισοσκελή τρίγωνα είναι και ισόπλευρα.  | <input type="checkbox"/>   | <input type="checkbox"/> |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| c. Όλα τα τραπέζια είναι παραλληλόγραμμα.  | <input type="checkbox"/>   | <input type="checkbox"/> |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| d. Ο ρόμβος είναι παραλληλόγραμμα.   | <input type="checkbox"/>   | <input type="checkbox"/> |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| e. Όλα τα τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα.   | <input type="checkbox"/>   | <input type="checkbox"/> |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| f. Όλα τα τετράγωνα έχουν τις ιδιότητες του ρόμβου.  | <input type="checkbox"/>   | <input type="checkbox"/> |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| <p><b>Ερώτηση 14</b><br/>                     Ποια από τα παρακάτω σχήματα είναι <b>παραλληλόγραμμα</b>; (κύκλωσε τα σωστά γράμματα)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"><br/>Κ</div> <div style="text-align: center;"><br/>Λ</div> <div style="text-align: center;"><br/>Μ</div> <div style="text-align: center;"><br/>Ν</div> <div style="text-align: center;"><br/>Ξ</div> <div style="text-align: center;"><br/>Ο</div> </div> <p>Να αιτιολογήσεις την απάντησή σου.</p> <hr/> <hr/> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει τουλάχιστον τα 2 από τα 4 σχήματα που είναι παραλληλόγραμμα και να μην έχει επιλέξει αυτά που δεν είναι.</p>   | <p>Εξετάζονται σχέσεις εγκλεισμού. Συγκεκριμένα, ελέγχεται η ικανότητα των μαθητών να κατατάξουν κάποιο σχήμα σε μία κατηγορία ανώτερης τάξης.</p> |                          |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| <p><b>Ερώτηση 15</b><br/>                     Να σημειώσεις με ✓ δίπλα από την πρόταση που είναι αληθής τόσο για τα ορθογώνια όσο και για τα παραλληλόγραμμα</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 80%;"></th> <th style="width: 20%; text-align: center;">Ορθογώνιο &amp; παραλλ/μμο</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>Οι διαγώνιες είναι ίσες.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> <tr> <td>Κανένα από τα παραπάνω.</td> <td style="text-align: center;"><input type="checkbox"/></td> </tr> </tbody> </table> <p>Πώς αποφάσισες ποιες από τις προτάσεις ισχύουν ταυτόχρονα για τα ορθογώνια και τα παραλληλόγραμμα;</p> <hr/> <hr/> <p>Ορθή απάντηση: Να έχει επιλέξει τουλάχιστον τις 2 από τις 3 προτάσεις που ισχύουν ταυτόχρονα για τα ορθογώνια &amp; τα παραλληλόγραμμα και να μην έχει επιλέξει αυτές που δεν ισχύουν.</p>  |  | Ορθογώνιο & παραλλ/μμο   | Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες. | <input type="checkbox"/>                                 | Οι διαγώνιες είναι ίσες. | <input type="checkbox"/> | Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.           | <input type="checkbox"/> | Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες. | <input type="checkbox"/>                  | Κανένα από τα παραπάνω.  | <input type="checkbox"/> | <p>Διερευνώνται σχέσεις μεταξύ σχημάτων, ειδικότερα μεταξύ του ορθογωνίου και του παραλληλογράμμου.</p> |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
|  | Ορθογώνιο & παραλλ/μμο   |                          |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| Οι απέναντι πλευρές είναι ίσες.  | <input type="checkbox"/>   |                          |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| Οι διαγώνιες είναι ίσες.   | <input type="checkbox"/>   |                          |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| Οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες.  | <input type="checkbox"/>   |                          |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες.   | <input type="checkbox"/>   |                          |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |
| Κανένα από τα παραπάνω.  | <input type="checkbox"/>   |                          |                                 |  |                          |                          |   |                          |                                |   |                          |                          |   |                          |                          |  |                          |                          |   |                          |                          |   |