ΑΠΟ ΤΟΝ ΓΑΛΙΛΑΙΟ ΣΤΗΝ..... ΑΙΘΟΥΣΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεόδωρος Γ. Πάσχος
Μαθηματικός, Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Abstract

The close relationship between Mathematics and Physics during their historical development is generally considered to offer motivational power to the educational praxis. In this paper, we discuss a teaching approach inspired by history in which the integration of genetic 'moments' in the history can lead to the designing of a specific activity. We exploited historical elements from the mathematical study of motions in the later Middle Ages (14th century) and Galileo (17th century) in order to introduce first-year undergraduates in the Department of Mathematics to the Fundamental Theorem of Calculus. The activity was based on a problem of motion and its representation in Cartesian axes of velocity/time. We used an original text from Galileo's book *"Dialogues Concerning Two New Sciences"* concerning the free fall of bodies. In this paper, we present: (1) elements of the History of Mathematics and Physics which we used in designing the activity, (2) the didactic aims of the activity, (3) worksheets and excerpts from the students' interviews, and (4) observations from analysis of the collected data.

Keywords

Integrating history in mathematics' teaching, free fall of bodies, Fundamental Theorem of Calculus.

Περίληψη

Η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών και της Φυσικής στη διδακτική πρακτική βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος των ερευνητών και των θεωρητικών στον τομέα της Διδακτικής τα τελευταία χρόνια. Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μια διδακτική προσέγγιση εμπνευσμένη από την Ιστορία στην οποία η ενσωμάτωση γενετικών ιστορικών 'στιγμών' οδήγησε στο σχεδιασμό μιας διδακτικής δραστηριότητας. Αξιοποιήσαμε ιστορικά στοιχεία από τη μαθηματική μελέτη των κινήσεων κατά τον Ύστερο Μεσαίωνα (14ο αιώνα) και τον Γαλιλαίο προκειμένου να εισαγάγουμε πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού. Η δραστηριότητα βασίστηκε σ' ένα πρόβλημα κίνησης και στην αναπαράστασή του με γράφημα ταχύτητας/χρόνου σε καρτεσιανούς άξονες. Χρησιμοποιήσαμε ένα πρωτότυπο κείμενο από το βιβλίο Διάλογοι για δύο νέες επιστήμες του Γαλιλαίου, σχετικά με την πτώση των σωμάτων στη φύση. Σε αυτό το άρθρο παρουσιάζουμε: (1) στοιχεία από την Ιστορία των Μαθηματικών και της Φυσικής που χρησιμοποιήσαμε στο σχεδιασμό της δραστηριότητας, (2) τους διδακτικούς στόχους της δραστηριότητας, (3) φύλλα εργασίας και τμήμα μιας συνέντευξης φοιτητών, και (4) παρατηρήσεις από την ανάλυση δεδομένων.

Λέξεις κλειδιά

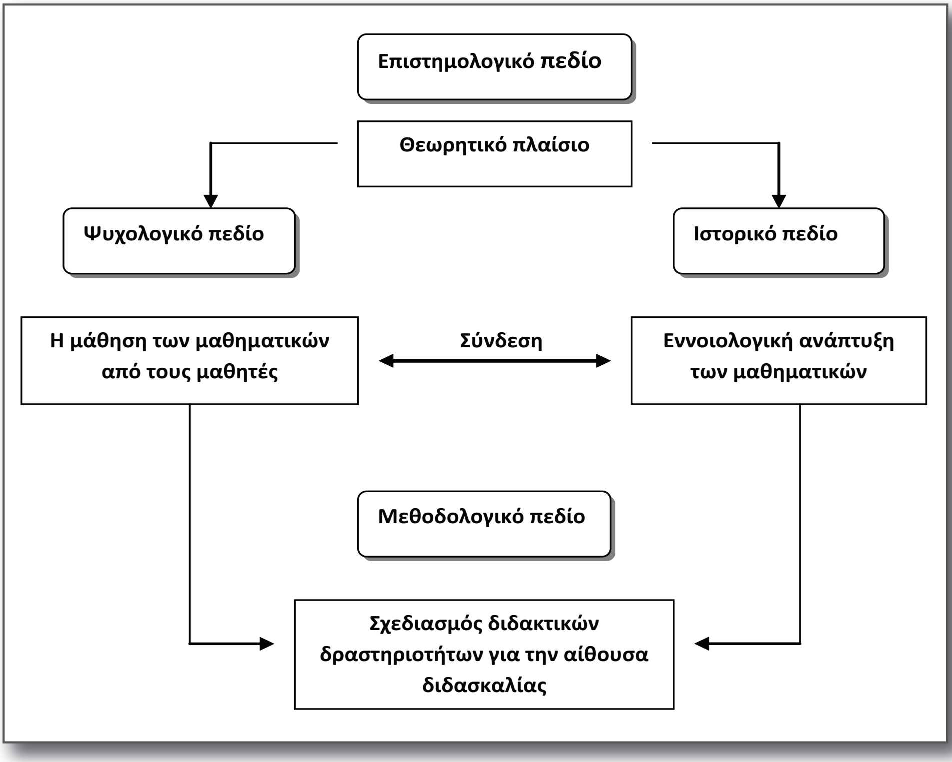
Ενσωμάτωση της Ιστορίας στη διδασκαλία, ελεύθερη πτώση των σωμάτων, Θεμελιώδες Θεώρημα του Λογισμού.

1. Θεωρητικά ζητήματα

Η φιλοσοφική θεώρηση των μαθηματικών ως ανθρώπινης δραστηριότητας επιδιώκει να ερμηνεύσει τη μαθηματική σκέψη σ' ένα εξελισσόμενο ιστορικό process. Να ερμηνεύσει την ατομική σκέψη στα πλαίσια ενός δεδομένου πολιτισμικού, κοινωνικού περιβάλλοντος, να κατανοήσει τα ιστορικά χαρακτηριστικά των εν εξελίξει ιδεών και γεγονότων, να ταξινομήσει αλληλεπιδράσεις, να αναζητήσει αιτίες, να συγκρίνει αποτελέσματα.

Σύμφωνα με τους Radford κ.ά. (2000: 144), η ενσωμάτωση της ιστορίας απαιτεί ένα σαφές και πλούσιο θεωρητικό πλαίσιο για το γενικό σχηματισμό της μαθηματικής γνώσης. Επιπλέον μια σαφή επιστημολογική τοποθέτηση και μια αποδοτική μεθοδολογία (σχ. 1):

Σχήμα 1: Το θεωρητικό πλαίσιο αναφέρεται στη σύνδεση της ιστορικής ανάπτυξης των μαθηματικών και της μάθησης μαθηματικών από τους μαθητές, μέσω μιας μεθοδολογίας που υποστηρίζει το σχεδιασμό διδακτικών δραστηριοτήτων βασισμένων στην ιστορία



2. Μέθοδοι ενσωμάτωσης της ιστορίας των μαθηματικών στην αίθουσα διδασκαλίας

Ζητούμενο είναι, το πώς θα αξιοποιηθεί η Ιστορία στη διδακτική πράξη. Ποιος είναι ο καταλληλότερος τρόπος ώστε η ιστορία να ανοίξει δρόμους στη μαθηματική κατανόηση. Να κάνει τη διαδικασία μάθησης ελκυστικότερη και αποδοτικότερη, να προωθήσει τη συλλογική διαπραγμάτευση και να ενισχύσει τα αλληλεπιδραστικά χαρακτηριστικά του κοινωνικού ρόλου της αίθουσας διδασκαλίας.

Σύμφωνα με τους Tzanakis & Arcavi (2000: 212) υπάρχουν τρεις τύποι πηγών αναφορικού υλικού: *Πρωτότυπες πηγές* (αποσπάσματα από αυθεντικά ιστορικά ντοκουμέντα), *δευτερεύουσες πηγές* οι οποίες σχετίζονται με ιστορικές αφηγήσεις, σχόλια και ερμηνείες, ανασυγκροτήσεις κλπ., τέλος, *πηγές διδακτικού υλικού* οι οποίες παραπέμπουν σε ιστορικά δεδομένα και συγκεκριμένες διδακτικές προσεγγίσεις εμπνευσμένες από την ιστορία.

Υπάρχουν διάφορες απόψεις αναφορικά με τον τρόπο αξιοποίησης του ιστορικού υλικού στην αίθουσα διδασκαλίας των μαθηματικών, οι οποίες μπορούν να ομαδοποιηθούν σε τρεις γενικές κατευθύνσεις ανάλογα με το διδακτικό στόχο:

(α) Εκμάθηση των μαθηματικών *άμεσα* από τα ιστορικά στοιχεία και τις σχετικές πληροφορίες.

(β) Εκμάθηση θεμάτων των Μαθηματικών, ακολουθώντας μια διδακτική στρατηγική σχεδιασμού και διδασκαλίας εμπνευσμένη από την ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών.

(γ) Ανάπτυξη της μαθηματικής συνείδησης προσεγγίζοντας την ίδια τη φύση των μαθηματικών καθώς και το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο ανάπτυξής τους. Μια τέτοια γενική κατηγοριοποίηση της διδακτικής αξιοποίησης της ιστορίας δεν αποκλείει, τουναντίον, πολλές φορές προϋποθέτει τη συμπληρωματικότητα των προσεγγίσεων.

Στην παρούσα εργασία αξιοποιούμε ιστορικά στοιχεία *άμεσα,* προστρέχοντας σε ένα αυθεντικό κείμενο του Γαλιλαίου. Ο διδακτικός στόχος είναι η προσέγγιση πρωτοετών φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος στο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού στο πλαίσιο μιας αλυσίδας δραστηριοτήτων (Paschos, T. & Farmaki, V., 2007, Πάσχος, 2007).

3. Το ιστορικό πλαίσιο

3.1. Η μελέτη των κινήσεων κατά τον Ύστερο Μεσαίωνα

3.1.1. Η μελέτη των κινήσεων στο Merton College, τον 14ο αιώνα

Τον 14^{ο} αιώνα έχουμε ουσιαστικά την αφύπνιση της επιστημονικής μεθοδολογίας. Κατά την περίοδο αυτή κυριαρχούν στο Merton College στην Οξφόρδη οι *Calculators*, οι λογικιστές – μαθηματικοί: William του Heytesbury (1313-1372 μ.Χ.), Richard Swineshead, άκμασε γύρω στα 1344-1354 μ.Χ.), και ο John του Dumbleton (άκμασε γύρω στα 1331-1349 μ.Χ.), οι οποίοι μελετούν τις κινήσεις των σωμάτων. Οι κινηματικοί του Merton College δίνουν ορισμούς των διάφορων μορφών της κίνησης, κάνουν εικασίες, διατυπώνουν σχετικά θεωρήματα και τα αποδεικνύουν με μαθηματικό τρόπο, χωρίς να προσφεύγουν σε πειραματική επιβεβαίωση. Εισάγουν την ιδέα της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ ταχύτητας και χρόνου. Μιλούν για την *ένταση* της ταχύτητας ως αριθμητικής τιμής η οποία αντιστοιχεί σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, οδηγώντας στη διαισθητική ανάδυση της έννοιας της στιγμιαίας ταχύτητας. Αποδεικνύουν το *Θεώρημα μέσης τιμής,* γνωστό ως *κανόνα του Merton*, για την ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Ο William Heytesbury γράφει στο «Rules for Solving Sophisms» – Part VI. Local motion, (Clagett, 1959: 235):

> *Από τις τοπικές κινήσεις, καλείται ομοιόμορφη, εκείνη η κίνηση στην οποία μια ίση απόσταση διανύεται συνεχώς με την ίδια ταχύτητα σ' ένα ίσο χρονικό διάστημα. Η ανομοιόμορφη κίνηση, απ' την άλλη, ποικίλει σε ένα άπειρο αριθμό τρόπων, τόσο σε σχέση με την ποσότητα, όσο σε σχέση με το χρόνο.*

Ο ορισμός της στιγμιαίας ταχύτητας, της ομοιόμορφα και μη ομοιόμορφα επιταχυνόμενης κίνησης, δόθηκε από τον Heytesbury ως εξής (Clagett, 1959: 235):

> *«... σε μια μη ομοιόμορφη κίνηση η στιγμιαία ταχύτητα σε μια δεδομένη χρονική στιγμή μετράται ή προσδιορίζεται μέσω μιας διαδρομής που θα μπορούσε να γράφεται από ένα κινούμενο σημείο, αν σε μια χρονική περίοδο, εκινείτο με ομοιόμορφη κίνηση, με την ίδια τιμή της ταχύτητας με την οποία αυτό εκινείτο σ' αυτή τη χρονική στιγμή...*
>
> *Κάθε κίνηση είναι ομοιόμορφα επιταχυνόμενη (uniformiter intenditur) αν, σε οποιαδήποτε ίσα χρονικά διαστήματα, αποκτά ίσες αυξήσεις ταχύτητας....*
>
> *... Αλλά μια κίνηση είναι μη ομοιόμορφα επιταχυνόμενη όταν αποκτά μια μεγαλύτερη αύξηση της ταχύτητας σε μια χρονική περίοδο από ότι σε μια άλλη ίση περίοδο..»*

Το *Θεώρημα Μέσης Τιμής* (Mean Speed Theorem) του Merton College είναι ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα των μελετών των Calculators του Merton, σύμφωνα με το οποίο μετράται η ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με όρους της μέσης ταχύτητάς της, δηλ. της ταχύτητας στη μέση χρονική στιγμή της διάρκειας της επιτάχυνσης.

Η παλαιότερη διατύπωση του θεωρήματος, σύμφωνα με τον Clagett (1959: 262), υπάρχει στο *Regule solventi sophismata* του W. Heytesbury, στα 1335 μ.Χ.:

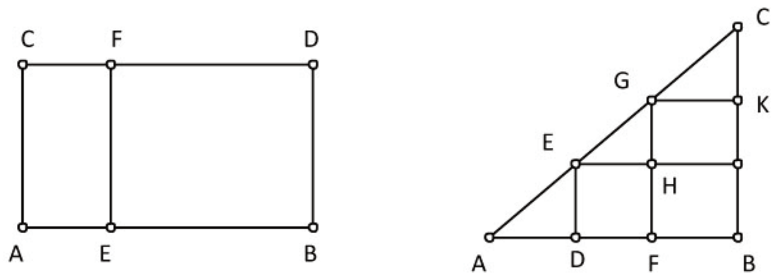
> *«Διότι είτε αρχίζει από την τιμή 0 ή από μια [πεπερασμένη] τιμή, κάθε πλάτος (latitude)* [δηλ. αύξηση ή μεταβολή της ταχύτητας, Θ.Π.] *εφ' όσον τερματίζεται σε κάποια πεπερασμένη τιμή, θα αντιστοιχεί στην μέση της τιμή. Έτσι το κινούμενο σώμα αποκτώντας ή χάνοντας αυτό το latidute ομοιόμορφα κατά την διάρκεια κάποιας καθορισμένης χρονικής περιόδου θα διανύσει μια απόσταση ακριβώς ίση με εκείνη που θα διένυε σε ίσο χρόνο, αν εκινείτο ομοιόμορφα με την μέση τιμή της ταχύτητας... Διότι κάθε κίνηση ως ολότητα, που συντελείται κατά την διάρκεια ολόκληρης της χρονικής περιόδου αντιστοιχεί στη μέση τιμή, δηλ. την τιμή* [της ταχύτητας, Θ.Π.] *την οποία θα είχε στη μέση χρονική στιγμή».*

3.1.2. Η εφαρμογή της γεωμετρίας των δύο διαστάσεων στη μελέτη των κινήσεων

Το πέρασμα στην Ευρώπη των κινηματικών συμπερασμάτων του Merton συνοδεύτηκε με την εφαρμογή ενός *γεωμετρικού μοντέλου αναπαράστασης των κινήσεων, και γενικότερα των ποιοτήτων, με σχήματα δυο διαστάσεων*. Πρόκειται για μια πρώτη μορφή γραφημάτων, που αναπαριστούσαν τις συναρτήσεις που υπονοούνται στις έννοιες της κίνησης. Βρισκόμαστε στην αρχή της ανάδυσης των νέων μαθηματικών, με έμφαση στα συστήματα αναπαράστασης (Farmaki, V. & Paschos, T., 2007).

Ο Nicole Oresme (1323 – 1382 μ.Χ.) αναπαράστησε με σχήματα δυο διαστάσεων τους ορισμούς που δόθηκαν στο Merton College. Ως ένα παράδειγμα της τεχνικής του, ας θεωρήσουμε τα παρακάτω σχήματα (ορθογώνιο παραλ/μο και ορθογώνιο τρίγωνο, σχ. 2). Καθ' ένα από αυτά αναπαριστά κάποια κίνηση. Η γραμμή AB, σε κάθε περίπτωση, παριστά την *έκταση* της κίνησης. Αλλά εκτός από την έκταση, έχει αναπαρασταθεί και η *ένταση* της κίνησης, κατά σημείο.

Σχήμα 2



(I) (II)

Αυτό το έκανε ο Oresme με τη χάραξη κατακόρυφων γραμμών προς τη γραμμή της βάσης AB των σχημάτων. Το μήκος των κατακόρυφων γραμμών ποικίλουν, όσο οι εντάσεις μεταβάλλονται. Έτσι σε κάθε σημείο κατά μήκος της AB, υπάρχει κάποια *ένταση* της ταχύτητας, και το σύνολο όλων αυτών των γραμμών αναπαριστά την ταχύτητα στο σύνολό της.

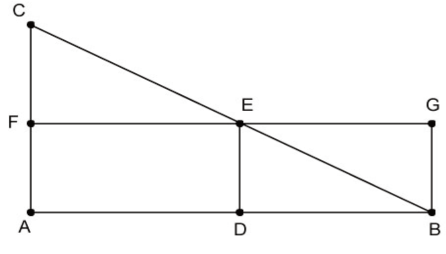
Με αυτόν τον τρόπο το ορθογώνιο ABCD αναπαριστά την ομοιόμορφη ταχύτητα - κίνηση, οι γραμμές AC, EF, BD αναπαριστούν τις εντάσεις της ταχύτητας στα σημεία A, E, και B (το E μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο της AB) και είναι ίσες. Όμοια, στην περίπτωση του ορθογωνίου τριγώνου ABC, φαίνεται ότι τα μήκη των κατακόρυφων γραμμών που αναπαριστούν εντάσεις, αυξάνουν ομοιόμορφα ως προς το μήκος. Άρα, το ορθογώνιο τρίγωνο, λέμε, ότι αναπαριστά μια ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη ταχύτητα - κίνηση (Boyer, 1959: 83). Φυσικά οι εντάσεις μπορούν να μεταβάλλονται με έναν άπειρο αριθμό τρόπων και έχουμε μιαν απεριόριστη ποικιλία σχημάτων να αναπαραστήσουμε άλλα είδη *μη ομοιόμορφων* κινήσεων.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, ο Oresme σχεδίασε την *«οριακή γραμμή»* CD (ή AC στην περίπτωση του τριγώνου), ως τη *«γραμμή των κορυφών»*-line of summit (*linea summitatis*), ή τη *«γραμμή της έντασης»*-line of intensity (linea intensionis) (Clagett, 1959: 353, 374). Ένωσε δηλ. τις πάνω άκρες των διακριτών εντάσεων της ταχύτητας (σχ. 2). Αυτό, μπορεί να συγκριθεί με μια καμπύλη στη σύγχρονη αναλυτική γεωμετρία. Ως εκ τούτου, *τα σχήματα τα ίδια*, στο σύστημα του Oresme, *μπορούν να συσχετισθούν με τα εμβαδά κάτω από τις καμπύλες*. Η 'καμπύλη' της γραμμής των κορυφών του Oresme αναπαριστά μια 'συνάρτηση' η οποία εκφράζεται λεκτικά. Η λεκτική έκφραση της συνάρτησης είναι «μια ομοιόμορφη ποιότητα-ταχύτητα», «μια ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη ποιότητα-ταχύτητα» κλπ. Οι *μεταβλητές* σ' αυτές τις 'συναρτήσεις' του Oresme είναι: η *«έκταση» – χρόνος κίνησης*, η *«ένταση» – τιμή της ταχύτητας σε κάθε χρονική στιγμή»* και η *«ποσότητα της ταχύτητας»* ως η διανυόμενη απόσταση η οποία αναπαρίσταται από το εμβαδόν του σχήματος.

Εδώ ο Oresme φαίνεται να κάνει μια μετάβαση, κατά τρόπο διαισθητικό, από τις διακριτές, κατά σημείο του υποκειμένου, εντάσεις της ταχύτητας, στο σύνολο του σχήματος και ως εκ τούτου στο συνεχές της γραμμής της έντασης. Αυτό το επιτρέπει το συνεχές της γραμμής της έκτασης πάνω στην οποία υψώνονται οι κατακόρυφες το *σύνολο* των οποίων δημιουργεί το επίπεδο σχήμα, σαρώνοντας την υποκείμενη γραμμή (*De configurationibus qualitatum*, κεφ. II.8, όπως αναφέρεται στο Clagett, 1959: 356, Clagett, 1968: 64, 289, Kaput, 1994: 93).

Το Θεώρημα της μέσης τιμής του Merton, εξισώνει μια ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη κίνηση με μια ομοιόμορφη κίνηση με ταχύτητα ίση με τη μέση τιμή της μεταβολής της ταχύτητας της μεταβαλλόμενης κίνησης, με την έννοια ότι διανύονται ίσες αποστάσεις σε ίσα χρονικά διαστήματα και στις δύο κινήσεις. Η απόδειξη του Oresme είναι καθαρά γεωμετρική. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου του οποίου το ύψος ισούται με τη μέση τιμή της ταχύτητας είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου του οποίου το ύψος αναπαριστά τη συνολική μεταβολή της ταχύτητας (Clagett, 1959: 358-359; Clagett, 1968: 409) (σχ. 3).

Σχήμα 3



Η απόδειξη του Oresme βασίζεται σε προτάσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας (τα τρίγωνα FEC και EBG είναι ίσα, κλπ, Στοιχεία, Βιβλίο Ι, Πρόταση XXVI). (Σταμάτης, 1975)

Σύμφωνα με τον Boyer (1959: 83), αυτό το θεώρημα και η γεωμετρική απόδειξη που έδωσαν ο Oresme και αργότερα ο Γαλιλαίος, έπαιξαν ένα κεντρικό ρόλο στην ανάπτυξη των απειροστικών μεθόδων και του ολοκληρωτικού Λογισμού.

3.2. Η συμβολή του Galileo Galilei (1564 – 1642 μ.Χ.) στη μελέτη των κινήσεων

Ο Γαλιλαίος στρέφεται στη μελέτη των κινήσεων διερευνώντας τη *«μαθηματική γλώσσα της Φύσης»*. Με τη μέθοδό του, το *«καθ' υπόθεσιν επιχείρημα»* (Crombie, 1992, τ. Β: 146), αναζητά τους μαθηματικούς νόμους που διέπουν τα φαινόμενα. Σχηματικά μπορούμε να περιγράψουμε τη μέθοδό του ως εξής:

1. Μέσω της παρατήρησης του εμπειρικού κόσμου *διατυπώνει υποθέσεις* (υποθέσεις εργασίας) για τη σχέση αιτίου – αποτελέσματος ενός φαινομένου.
2. Δημιουργεί μαθηματική θεωρία προσαρμοσμένη στις υποθέσεις και οδηγείται σε *μαθηματικά συμπεράσματα.*
3. Την αλήθεια ή τη διάψευση των συμπερασμάτων του, επιβεβαιώνει με *πειράματα προσαρμοσμένα σ' αυτά τα μαθηματικά συμπεράσματα*.
4. Με αυτόν τον τρόπο οδηγείται στην επιβεβαίωση ή τη διάψευση των αρχικών υποθέσεων.

Στο τελευταίο του βιβλίο *Διάλογοι για δύο νέες επιστήμες* (Galilei, 1954), ορίζει την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση την οποία αναπαριστά με σχήματα δύο διαστάσεων σύμφωνα με το μοντέλο του Oresme. Αποδεικνύει αρχικά το θεώρημα μέσης τιμής του Merton περιγράφοντας μια *διαδικασία 'ολοκλήρωσης'* (Galilei, 1954:160). Στο κομβικό 2^{ο} θεώρημά του στην ομοιόμορφα μεταβαλλόμενη κίνηση, αναφέρει:

> *«Οι αποστάσεις που διανύονται από ένα σώμα που πέφτει με μια ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση* [εκκινώντας] *από την ηρεμία, είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χρονικών διαστημάτων που απαιτούνται προκειμένου να διανυθούν αυτές οι αποστάσεις,* δηλ.: $(S_1/S_2) = (t_1^2/t_2^2)$».

Στο πόρισμα που ακολουθεί (Galilei, 1954: 175), στηρίζεται η πειραματική επιβεβαίωση ότι η πτώση των σωμάτων υπό την επίδραση του βάρους τους είναι κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη. Συγκεκριμένα αναφέρεται:

> *«Οι αποστάσεις που διανύονται σε ίσα χρονικά διαδοχικά διαστήματα στην ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση, είναι ανάλογες των περιττών αριθμών, αρχίζοντας από τη μονάδα, δηλ.:* $(S_1/1) = (S_2/3) = (S_3/5) = (S_4/7) = \ldots$».

(Βλέπε στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ το διάλογο με τις σχετικές αποδείξεις από το κείμενο του Γαλιλαίου).

Οι μαθηματικές αποδείξεις του 2ου θεωρήματος και του πορίσματος με την *υπόθεση* ότι η ταχύτητα, κατά την πτώση των σωμάτων, είναι ανάλογη του χρόνου και η κίνηση είναι ομοιόμορφα επιταχυνόμενη, υπάρχουν στα κείμενα του Oresme, τρεις αιώνες πριν. Είναι όμως έτσι τα πράγματα *στη φύση;* Αυτό ακριβώς θέλει να επιβεβαιώσει πειραματικά ο Γαλιλαίος. Ότι η πτώση των σωμάτων υπό την επίδραση του βάρους τους είναι κίνηση ομοιόμορφα επιταχυνόμενη, εξετάζοντας το φυσικό φαινόμενο και όχι μια υποθετική κίνηση όπως έκανε ο Oresme. Επιχειρεί προσομοίωση της ελεύθερης πτώσης με το κεκλιμένο επίπεδο και την κάθοδο των μεταλλικών σφαιρών υπό την επίδραση μιας συνιστώσας του βάρους τους. Οι μετρήσεις του επιβεβαιώνουν τα μαθηματικά του συμπεράσματα (ότι δηλ., $\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$).

Άρα επιβεβαιώνει πειραματικά ότι στη φύση, η ελεύθερη πτώση *είναι* ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση, όπως κατηγορηματικά δηλώνει στο σχετικό κείμενο (το οποίο εμπεριέχεται πλήρως στο φύλλο εργασίας παρακάτω, όπως δόθηκε στους φοιτητές).

Σχηματικά, η μεθοδολογία της επιστημονικής προσέγγισης του Γαλιλαίου σχετικά με την πτώση των σωμάτων, θα μπορούσε να αποδοθεί ως εξής (σχ. 4):

Σχήμα 4

Παρατήρηση: Η ταχύτητα αυξάνει κατά την πτώση των σωμάτων με την πάροδο του χρόνου.

↓

Υπόθεση: Κατά την **πτώση** των σωμάτων η κίνηση είναι **ομαλά επιταχυνόμενη**. Άρα σύμφωνα με τον ορισμό της κίνησης, **η ταχύτητα είναι ανάλογη του χρόνου**.

↓

Με δεδομένη την υπόθεση ως ΑΞΙΩΜΑ, **κατασκευάζει μαθηματική θεωρία** και γεωμετρικό μοντέλο μελέτης της κίνησης και καταλήγει σε μαθηματικά συμπεράσματα:

(1) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$ και (2) $\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \ldots$, σε ίσους χρόνους.

↓

Κατασκευάζει πείραμα προσαρμοσμένο στα παραπάνω μαθηματικά συμπεράσματα ώστε να τα ελέγξει εμπειρικά. Επιβεβαιώνει μέσω μετρήσεων, σε πραγματικές συνθήκες, τα μαθηματικά του αποτελέσματα

↓

Συμπεραίνει: Η αρχική υπόθεση, η οποία στήριξε τους περαιτέρω συλλογισμούς, δηλ., **ο ορισμός της κίνησης ως ομαλά επιταχυνόμενης, κατά την πτώση, είναι αληθής.**

Ισχυριζόμαστε ότι μέσω της εφαρμογής της μεθόδου στην περίπτωση της μελέτης της καθόδου των μεταλλικών σφαιρών στο κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους τους, ο Γαλιλαίος έχει προσεγγίσει διαισθητικά το *Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού* (Πάσχος, 2007). Όχι μόνο αποδεικνύει τη δευτεροβάθμια σχέση διανυόμενης απόστασης – χρόνου *με δεδομένη την υπόθεση της γραμμικής συνάρτησης της ταχύτητας*, αλλά και αντίστροφα, αποφαίνεται για το μοναδικό *'αίτιο'* δεδομένης της πειραματικής επιβεβαίωσης του μαθηματικού *'αποτελέσματος'*. Δηλαδή, *επιβεβαιώνοντας πειραματικά τη δευτεροβάθμια σχέση απόστασης – χρόνου, συμπεραίνει ότι η ταχύτητα είναι γραμμική συνάρτηση*.

4. Η διδακτική προσέγγιση και η συλλογή δεδομένων

Στην πειραματική διδασκαλία συμπεριλάβαμε μια δραστηριότητα στην οποία οι φοιτητές καλούνται να προσεγγίσουν διαισθητικά το Θεμελιώδες θεώρημα, μέσα από το αυθεντικό κείμενο του Γαλιλαίου που αναφέρεται στο γνωστό πείραμα του κεκλιμένου επιπέδου. Ο διδακτικός στόχος ήταν να εμπλακούν οι φοιτητές σε μια ερευνητική διαπραγμάτευση της σχέσης μεταξύ της μαθηματικής μοντελοποίησης μιας πραγματικής κατάστασης και του πειραματισμού που προκύπτει ως αποτέλεσμα των μαθηματικών συμπερασμάτων.

4.1. Δραστηριότητα 'GALILEO GALILEI' - Φύλλο εργασίας:

"Ο Γαλιλαίος παρατηρεί τις πέτρες καθώς πέφτουν από την οροφή του πύργου της Πίζα. Ένας από τους βοηθούς του φροντίζει να αφήνει σε ελεύθερη πτώση μια πέτρα κάθε φορά που του γνέφει ο Γαλιλαίος".

Έτσι ιστορεί η παράδοση τα πειράματα του Γαλιλαίου τα σχετικά με τη μελέτη της ελεύθερης πτώσης των σωμάτων. Ας υποθέσουμε ότι βρίσκεστε στο περιβάλλον του Γαλιλαίου και σας ζητείται να πάρετε μέρος στις μαθηματικές επεξεργασίες μελέτης της κίνησης των σωμάτων κατά την πτώση. Ο Γαλιλαίος *ισχυρίζεται* ότι η πτώση των σωμάτων *είναι ομαλά επιταχυνόμενη* κίνηση. (Η πτώση υπό την επίδραση του βάρους των σωμάτων, είτε ως ελεύθερη πτώση, ή ως κάθοδος σε ένα κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση μιας σταθερής συνιστώσας του βάρους τους. Την κίνηση αυτή την χαρακτηρίζει ως *φυσικά επιταχυνόμενη κίνηση*).

Α) Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα πέφτει ελεύθερα υπό την επίδραση του βάρους του. Σας ζητάει να σχεδιάσετε, με δεδομένο τον ισχυρισμό του, το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο για την κίνηση αυτή. (Θεωρήστε χρονικό διάστημα [0, t]).

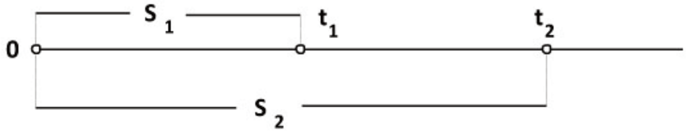
Β) Σας ζητάει να υπολογίσετε τη μετατόπιση ως συνάρτηση του t. (Από το γράφημα να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης θέσεως του σώματος).

Στο βιβλίο του Γαλιλαίου, *Διάλογοι για δυο νέες επιστήμες*, σελ. 175-179, διαβάζουμε:

Θεώρημα II (Στην «φυσικά» επιταχυνόμενη κίνηση)

Οι αποστάσεις που διανύονται από ένα σώμα που πέφτει (κατέρχεται), [εκκινώντας] από την ηρεμία, με μια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χρονικών διαστημάτων που χρειάζονται για να διανυθούν αυτές οι αποστάσεις.

(Δηλ. ο λόγος των αποστάσεων οι οποίες διανύονται, από την αρχή της κίνησης, από το ίδιο σώμα το οποίο πέφτοντας εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ισούται με το λόγο των τετραγώνων των χρονικών διαστημάτων που απαιτούνται προκειμένου να διανυθούν οι αποστάσεις αυτές. Με σύγχρονο συμβολισμό $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$).



Πόρισμα. Αν πάρουμε οποιαδήποτε **ίσα** χρονικά διαδοχικά διαστήματα, μετρώντας από την αρχή της κίνησης, στα οποία διανύονται αντιστοίχως οι αποστάσεις S_1, S_2, S_3, S_4,..., τότε $\frac{S_1}{1}=\frac{S_2}{3}=\frac{S_3}{5}=\frac{S_4}{7}=\ldots$ (Διατύπωση σε σύγχρονη απόδοση).

Γ) Χρησιμοποιώντας το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο που κατασκευάσατε παραπάνω, να αποδείξετε το Θεώρημα II του Γαλιλαίου.

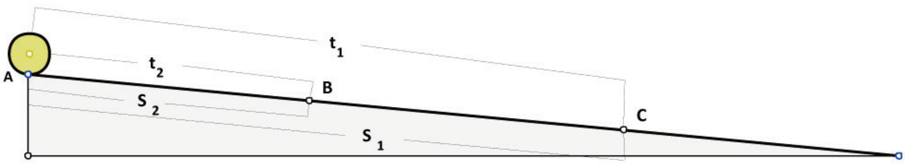
Δ) Χρησιμοποιώντας το γράφημα ταχύτητας – χρόνου να αποδείξετε το πόρισμά του, για τα τέσσερα πρώτα ίσα διαδοχικά χρονικά διαστήματα.

Το πείραμα του Γαλιλαίου: (μετάφραση από το: *Διάλογοι για δυο νέες επιστήμες*, (Galilei, 1954: 178, 179).

Σχόλιο: Η ανάπτυξη της θεωρίας και τα επιχειρήματα του Γαλιλαίου περιγράφονται στο βιβλίο του υπό μορφή διαλόγων μεταξύ τριών προσώπων, των: Salviati (παρουσιάζει τις απόψεις του Γαλιλαίου – συγγραφέα), Sagredo (αντικειμενικός συνομιλητής) και Simplicio (δύσπιστος συνομιλητής). Στο σημείο αυτό, του πειράματος, έχουν προηγηθεί δυο μαθηματικές αποδείξεις του Θεωρήματος ΙΙ και του πορίσματος. Η πρώτη του συγγραφέα (Γαλιλαίου), δυσκολεύει τον Simplicio, ενώ η δεύτερη που δίνεται από τον Sagredo, τον πείθει....

Σημειώστε ότι το παρακάτω σχήμα είναι υποβοηθητικό και δεν περιέχεται στο κείμενο του Γαλιλαίου που ακολουθεί. (σχ. 5)

Σχήμα 5



« ...***SIMPL.***: *Στην πραγματικότητα βρίσκω μεγαλύτερη ικανοποίηση από αυτόν τον απλό και καθαρό ισχυρισμό του Sagredo, παρά στην απόδειξη του συγγραφέα, η οποία μου φαίνεται μάλλον δυσνόητη. Έτσι πείθομαι ότι τα ζητήματα είναι όπως περιγράφηκαν, άπαξ και έχουμε δεχτεί τον ορισμό της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Αλλά κατά πόσο αυτή η επιτάχυνση, είναι εκείνη που συναντά κάποιος στη φύση, στην περίπτωση της πτώσης των σωμάτων, ακόμα αμφιβάλλω. Και μου φαίνεται, όχι μόνο για χατίρι μου, αλλά για όλους όσοι σκέφτονται όπως εγώ, ότι την κατάλληλη στιγμή θα πρέπει να παρουσιάσεις ένα από εκείνα τα πειράματα – και καταλαβαίνω πως υπάρχουν πολλά τέτοια – το οποίο να περιγράφει με διάφορους τρόπους τα συναγόμενα συμπεράσματα».*

*«**SALV.**: Το αίτημα που υποβάλλεις ως άνθρωπος της επιστήμης είναι εύλογο. Διότι έτσι πρέπει να συμβαίνει σε εκείνες τις επιστήμες όπου οι μαθηματικές αποδείξεις εφαρμόζονται σε φυσικά φαινόμενα, όπως φαίνεται στην περίπτωση της αστρονομίας, της μηχανικής, της μουσικής κ. ά., οι αρχές των οποίων, κατ' αρχήν θεμελιώνονται μέσω καλά επιλεγμένων πειραμάτων, και επιτυγχάνεται η θεμελίωση όλου του εποικοδομήματος. Ελπίζω ωστόσο, ότι δεν θα σπαταλήσω το χρόνο αν συζητήσουμε επί μακρόν, αυτήν την πρώτη και ιδιαίτερα θεμελιώδη ερώτηση από την οποία εξαρτώνται πάμπολλες συνέπειες από τις οποίες έχουμε στο παρόν βιβλίο, μόνο ένα μικρό αριθμό.... Έχω προσπαθήσει να βεβαιωθώ με τον παρακάτω τρόπο, ότι η επιτάχυνση η οποία βιώνεται στην πραγματικότητα μέσω της πτώσης των σωμάτων, είναι αυτή που περιγράφηκε παραπάνω».*

«Πήραμε ένα κομμάτι ξύλινο καλούπι ή καδρόνι, περίπου 12 πήχεις μακρύ, μισό πήχη πλάτος, και τρία δάχτυλα πάχος. Στη μια άκρη του [κατά μήκος του καδρονιού], σκαλίστηκε ένα αυλάκι λίγο περισσότερο από ένα δάκτυλο πλάτος. Έχοντας κατασκευάσει αυτό το αυλάκι εντελώς ίσιο, λείο και γυαλισμένο και έχοντάς το φοδράρει με περγαμηνή, επίσης όσο λεία και γυαλισμένη είναι δυνατόν, αφήσαμε να κυλήσει κατά μήκος του μια σκληρή, λεία και απολύτως σφαιρική μπρούτζινη σφαίρα. Έχοντας τοποθετήσει αυτή τη σανίδα σε μια κεκλιμένη θέση, ανυψώνοντας ένα από τα άκρα της ένα ή δυο πήχεις πάνω από το άλλο, κυλήσαμε τη σφαίρα, όπως μόλις είπα, κατά μήκος του καναλιού, σημειώνοντας, με τον τρόπο που θα περιγράψουμε σε λίγο, το χρόνο που απαιτείται για να πραγματοποιηθεί η κάθοδος. Επαναλαμβάνουμε αυτό το πείραμα περισσότερες από μία φορά προκειμένου να μετρήσουμε το χρόνο με μια ακρίβεια τέτοια, ώστε η απόκλιση μεταξύ δυο παρατηρήσεων ποτέ να μη ξεπερνάει το ένα δέκατο ενός καρδιακού παλμού. Έχοντας εκτελέσει αυτό το πείραμα και έχοντας βεβαιωθεί για την αξιοπιστία του, τώρα κυλίουμε τη σφαίρα μόνο στο ένα τέταρτο του μήκους του καναλιού. Μετράμε το χρόνο καθόδου και τον βρίσκουμε ακριβώς μισό του προηγούμενου [χρόνου]. Εξακολουθούμε να δοκιμάζουμε άλλες αποστάσεις, συγκρίνοντας το χρόνο όλου του μήκους με εκείνον του μισού μήκους, ή με εκείνον των δύο τρίτων, ή των τριών τετάρτων, ή ακόμα για οποιοδήποτε κλάσμα. Σε τέτοια πειράματα, επαναλαμβανόμενα τουλάχιστον εκατό φορές, πάντα βρίσκουμε ότι οι αποστάσεις που διανύονται είναι μεταξύ τους [έχουν λόγο]*, όπως τα τετράγωνα των χρόνων, και αυτό είναι αληθές για όλες τις κλίσεις του επιπέδου, δηλ, του καναλιού, κατά μήκος του οποίου κυλήσαμε τη σφαίρα. Επίσης παρατηρήσαμε ότι οι χρόνοι καθόδου, για διάφορες κλίσεις του επιπέδου, έχουν μεταξύ τους ακριβώς εκείνο το λόγο τον οποίο όπως θα δούμε αργότερα, ο συγγραφέας είχε προβλέψει και αποδείξει για αυτόν».*

«Για την μέτρηση του χρόνου, χρησιμοποιήσαμε ένα μεγάλο δοχείο νερού τοποθετημένο σε μια ανυψωμένη θέση. Στον πυθμένα αυτού του δοχείου ήταν συγκολλημένος ένας σωλήνας μικρής διαμέτρου ο οποίος παρείχε ένα λεπτό πίδακα νερού, το οποίο συλλέγαμε σε ένα μικρό ποτήρι κατά τη διάρκεια κάθε καθόδου, είτε για όλο το μήκος του καναλιού, ή για ένα τμήμα αυτού του μήκους. Το νερό που συλλέχτηκε μ' αυτό τον τρόπο ζυγίστηκε μετά από κάθε κάθοδο, με ένα ζυγό ακριβείας. Οι διαφορές και οι λόγοι αυτών των βαρών μας έδωσαν τις διαφορές και τους λόγους των χρόνων, και αυτά με τέτοια ακρίβεια, που μολονότι το πείραμα επαναλήφθηκε πάρα πολλές φορές, δεν υπήρξε αξιόλογη απόκλιση στα αποτελέσματα».

*«**SIMPL.**: Θα ήθελα να ήμουν παρών σ' αυτά τα πειράματα, αλλά δείχνοντας εμπιστοσύνη στο ενδιαφέρον με το οποίο μας τα αναπαριστάς, και στην ακρίβεια*

με την οποία τα συσχετίζεις, είμαι ικανοποιημένος και τα δέχομαι ως αληθή και έγκυρα»....

....

Ερώτηση προς τους φοιτητές: Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι με αυτό το πείραμα ο Γαλιλαίος αποδεικνύει ότι η ελεύθερη πτώση των σωμάτων είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Από προηγούμενες δραστηριότητες, οι φοιτητές γνωρίζουν ότι η διανυόμενη απόσταση στα προβλήματα κίνησης αναπαρίσταται από το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της ταχύτητας.

Θέλουμε από τους φοιτητές:

α) Να αποδείξουν ότι $S(t) = (1/2)at^2$, από το γράφημα της ταχύτητας $U(t) = at$.

β) Να αποδειχθεί ότι $S_1/ 1 = S_2/ 3 =S_3/ 5 = S_4/7$, αν η χρονική διάρκεια της κίνησης διαιρεθεί σε τέσσερα ίσα διαστήματα.

γ) Να αξιολογήσουν τη σημασία της μοντελοποίησης πραγματικών καταστάσεων, τη σημασία των μαθηματικών συμπερασμάτων στην ερμηνεία των φυσικών νόμων της κίνησης και να συζητηθεί η σχέση ταχύτητας – μετατόπισης υπό το πρίσμα του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Λογισμού του οποίου την τυπική απόδειξη έχουν διδαχθεί στο β′ εξάμηνο του πρώτου έτους στο Μαθηματικό Τμήμα.

4.2. Από το φύλλο εργασίας δύο φοιτητών που εργάσθηκαν με τη δραστηριότητα του «Γαλιλαίου» (εικόνες 1, 2, 3)

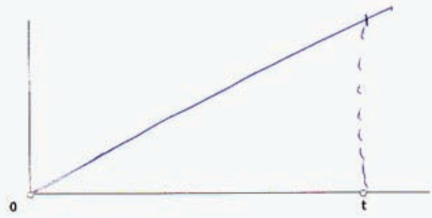
Παραθέτουμε ενδεικτικά ένα φύλλο εργασίας και τη συνέντευξη που ακολούθησε προκειμένου να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο προσέγγισαν το πείραμα.

Το φύλλο εργασίας των Παναγιώτη και Βαγγέλη:

Εικόνα 1

Α). Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα πέφτει ελεύθερα υπό την επίδραση του βάρους του. Σας ζητάει να σχεδιάσετε, με δεδομένο τον ισχυρισμό του, το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο για την κίνηση αυτή.

(Θεωρήστε χρονικό διάστημα [0, t]).



Β). Σας ζητάει να υπολογίσετε τη μετατόπιση ως συνάρτηση του t. (Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης θέσεως του σώματος)

$$\left.\begin{array}{l} s(t) = \frac{1}{2} t \cdot v(t) \\ v(t) = c \cdot t \end{array}\right\} \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2} c \cdot t^2$$

(υ-t ανάλογα)

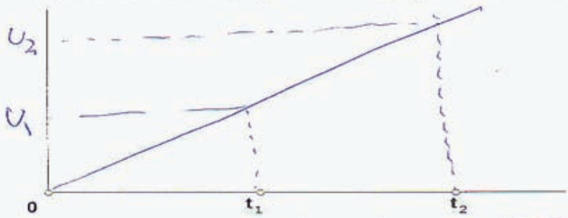
(c : επιτάχυνση)

Εικόνα 2

<u>Θεώρημα Ι Ι</u> (Στην «φυσικά» επιταχυνόμενη κίνηση)

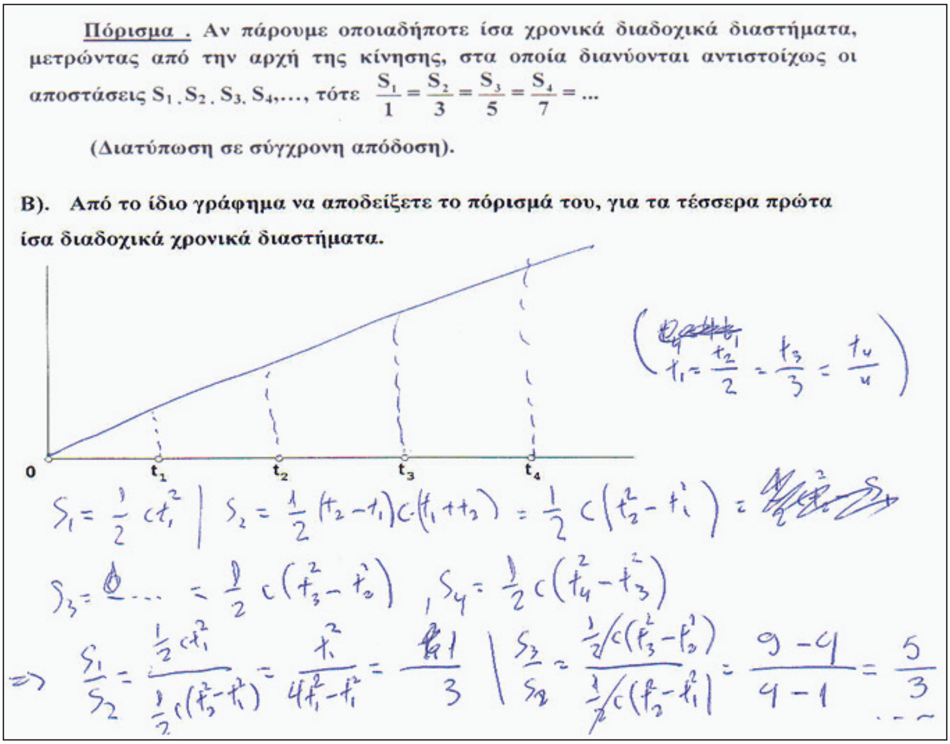
Οι αποστάσεις που διανύονται από ένα σώμα που πέφτει (κατέρχεται), [εκκινώντας] από την ηρεμία, με μια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χρονικών διαστημάτων που χρειάζονται για να διανυθούν αυτές οι αποστάσεις.

Α). Από το γράφημα της ταχύτητας ως προς το χρόνο που κατασκευάσατε παραπάνω, να αποδείξετε το Θεώρημα Ι Ι του Γαλιλαίου.



$$\left.\begin{array}{l} s_1 = \frac{1}{2} c t_1^2 \\ s_2 = \frac{1}{2} c \cdot t_2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}}$$

Εικόνα 3



<u>Πόρισμα</u>. Αν πάρουμε οποιαδήποτε ίσα χρονικά διαδοχικά διαστήματα, μετρώντας από την αρχή της κίνησης, στα οποία διανύονται αντιστοίχως οι αποστάσεις $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$, τότε $\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \frac{S_4}{7} = \ldots$

(Διατύπωση σε σύγχρονη απόδοση).

Β). Από το ίδιο γράφημα να αποδείξετε το πόρισμά του, για τα τέσσερα πρώτα ίσα διαδοχικά χρονικά διαστήματα.

$S_1 = \frac{1}{2} c t_1^2 \;\Big|\; S_2 = \frac{1}{2}(t_2 - t_1) c (t_1 + t_2) = \frac{1}{2} c (t_2^2 - t_1^2) =$

$S_3 = \ldots = \frac{1}{2} c (t_3^2 - t_2^2), \quad S_4 = \frac{1}{2} c (t_4^2 - t_3^2)$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} c t_1^2}{\frac{1}{2} c (t_2^2 - t_1^2)} = \frac{t_1^2}{4t_1^2 - t_1^2} = \frac{1}{3} \;\Big|\; \frac{S_3}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} c (t_3^2 - t_2^2)}{\frac{1}{2} c (t_2^2 - t_1^2)} = \frac{9-4}{4-1} = \frac{5}{3} \ldots$

4.3. Η συζήτηση με τον Παναγιώτη και τον Βαγγέλη (ένα τμήμα της συνέντευξης):

(1) **Ερευνητής:** Ο Γαλιλαίος ισχυρίζεται ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, κατά την πτώση των σωμάτων. Ο ίδιος λέει ότι αυτό το αποδεικνύει. Κατ' αρχήν να θυμηθούμε τον ορισμό της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης εκείνης της εποχής. Ομαλά επιταχυνόμενη είναι η κίνηση εκείνη κατά την οποία σε οποιαδήποτε ίσα χρονικά διαστήματα έχω ίσες αυξήσεις της ταχύτητας.

(2) **Βαγγέλης:** Κατά Merton College.

(3) **Ερ.:** Ο Γαλιλαίος με αυτό τον ισχυρισμό προχωρεί και κατασκευάζει μια μαθηματική θεωρία. Συνεπώς, αν πέφτει το σώμα υπό την επίδραση του βάρους, ζητείται να σχεδιάσετε το γράφημα της ταχύτητας.

(4) **Παναγιώτης:** Ναι είναι γραμμική συνάρτηση, όπως και στις προηγούμενες δραστηριότητες που είχαμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

(5) **Ερ.:** Με βάση αυτό, σας ζητάει να υπολογίσετε τη μετατόπιση.

(6) **Βαγγ.:** Το εμβαδόν στο γράφημα της ταχύτητας είναι η μετατόπιση.

(7) **Ερ.:** Διατυπώνει λοιπόν εδώ, ένα θεώρημά του για τη κίνηση αυτή, και αν S_1 και S_2 είναι δυο μετατοπίσεις σε αντίστοιχους χρόνους t_1 και t_2, τότε ισχύει ότι $\frac{S_1}{S_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$.

(8) **Βαγγ.:** Ναι, στην ελεύθερη πτώση.

(9) **Ερ.:** Είτε στην ελεύθερη πτώση, είτε στην κάθοδο σ' ένα κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση μιας σταθερής δύναμης του βάρους. Είναι η ίδια κίνηση. Απλώς πάει στο κεκλιμένο επίπεδο για να κάνει προσομοίωση της ελεύθερης πτώσης.

(10) **Παν.:** Για να πάει πιο αργά το σώμα.

(11) **Ερ.:** Ναι, και να μπορεί να μετρήσει. Βλέπω ότι το θεώρημα αυτό το αποδεικνύετε στο γράφημα που έχετε κάνει.

(12) **Βαγγ., Παν.:** Ναι, ναι.

(13) **Ερ.:** Άρα μαθηματικά, δεν υπάρχει δυσκολία να αποδείξετε το θεώρημα με το γράφημα που κάνατε. Αυτός δεν έχει γράφημα εκείνη την εποχή, χρησιμοποιεί θεωρία λόγων του Ευκλείδη. Εδώ βγαίνει ένα πόρισμα από το θεώρημα αυτό, που λέει ότι οι διανυόμενες αποστάσεις σ' αυτές εδώ τις διαδοχικές ίσες χρονικές περιόδους, έχουν λόγο όπως οι αριθμοί 1, 3, 5, 7,... Και εδώ ζητείται απόδειξη. Έγινε η απόδειξη;

(14) **Παν.:** Ναι, ναι.... Το S_1 είναι το εμβαδόν του τριγώνου αυτού, το S_2 το εμβαδόν του τριγώνου αυτού. Διαιρέσαμε κατά μέλη, είπαμε ότι το t_2 είναι $2t_1$, το t_3 είναι $3t_1$, κλπ. Και εύκολα βγαίνει. *(Δείχνει τα τρίγωνα στο φύλλο εργασίας).*

(15) **Ερ.:** Αυτά τα επεξεργάζεται με μαθηματικό τρόπο ο Γαλιλαίος και καταλήγει στο πόρισμα. Με το θεώρημα αυτό ο Γαλιλαίος έχει αποδείξει τη δευτεροβάθμια σχέση μετατόπισης και χρόνου. Εδώ υπάρχει το πείραμα σε μετάφραση από το πρωτότυπο. Και φαίνεται τι ακριβώς διαμείβεται μεταξύ των συνομιλητών. Ο Γαλιλαίος εκθέτει τις απόψεις του μέσα από διαλόγους κάποιων συνομιλητών. Ένας είναι αυτός που υποστηρίζει τη θεωρία του και τον ίδιο, ένας άλλος είναι ο δύσπιστος που ζητάει κάθε φορά αποδείξεις, και ένας είναι αντικειμενικός παρατηρητής. Κάνει λοιπόν το πείραμα.

(16) **Βαγγ.:** Αυτό με τη μπάλα.

(17) **Ερ.:** Ναι, με το κεκλιμένο επίπεδο...

(18) **Παναγ.:** Που μετράει χρόνους με το δοχείο.

(19) **Ερ.:** Ναι, μετράει βάρη και υπολογίζει χρόνους. Η ερώτηση ποια είναι; Μπορώ να ισχυριστώ ότι ο Γαλιλαίος μ' αυτό το πείραμα αποδεικνύει ότι η ελεύθερη πτώση των σωμάτων είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση;

(20) **Παν.:** Εγώ πιστεύω ότι αυτό βγαίνει, γιατί αποδεικνύει πειραματικά αυτό που μας λέει. Ότι $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$, γιατί μετράει τους χρόνους.

(21) **Ερ.:** Όμως εδώ δεν έχουμε ταχύτητες. Μετράει αποστάσεις και χρόνους. Πώς βγαίνει συμπέρασμα για τη ταχύτητα;

(22) **Παν.:** Έχει αποδείξει ότι η σχέση $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$ ισχύει όταν έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

(23) **Ερ.:** Άρα από την ταχύτητα που πάει;

(24) **Βαγγ.:** Στις αποστάσεις.

(25) **Ερ.:** Και αποδεικνύει;

(26) **Παν.:** Το θεώρημα, τη σχέση $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$.

(27) **Ερ.:** Πώς μπορώ να βγάλω τότε συμπέρασμα ότι αποδεικνύει τον ισχυρισμό του για την ταχύτητα;

(28) **Βαγγ.:** Έκανε το πείραμα με το κεκλιμένο επίπεδο και έδειξε ότι η κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη;

(29) **Παν.:** Κάνοντας το πείραμα και μετρώντας τους αντίστοιχους χρόνους και τις αποστάσεις, επαληθεύει αυτά που έχει αποδείξει.

(30) **Ερ.:** Θα προσπαθήσω να σας κατευθύνω λίγο. Ισχυρίζεται ότι η ταχύτητα είναι U = at. Έχει την ταχύτητα ότι είναι έτσι. Με μαθηματικό τρόπο πάει στη μετατόπιση, δηλ. πάει σε μια άλλη συνάρτηση. Στη συνάρτηση της μετατόπισης ως προς το χρόνο και αποδεικνύει και μαθηματικά και πειραματικά τη σχέση της μετατόπισης με το χρόνο. Δηλ. από μια συνάρτηση, πάει σε μια άλλη, όπου εκεί αποδεικνύει τη σχέση που ισχύει. Το ερώτημα που συζητάμε είναι, πώς από αυτό εδώ βγάζει συμπέρασμα για τον αρχικό ισχυρισμό του; Βλέπετε κάποια συσχέτιση με ότι έχουμε κάνει μέχρι τώρα;

(31) **Παν., Βαγγ.:** ….. ….. *(παύση)*

(32) **Ερ.:** Έχουμε τη συνάρτηση της ταχύτητας. Πάμε στο ολοκλήρωμα που είναι η μετατόπιση. Πειραματίζεται στο ολοκλήρωμα, στη σχέση $\frac{S_1}{S_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}$, προκειμένου να αποδείξει, λέω εγώ, τον ισχυρισμό του ότι η πτώση είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Γιατί πειραματίζεται στο ολοκλήρωμα; Γιατί μπορεί να μετρήσει χρόνους και αποστάσεις. Δεν μπορεί εκείνη την εποχή να μετρήσει ταχύτητες. Παρατηρεί όμως μια στενή αλληλεξάρτηση μεταξύ των δύο συναρτήσεων, της ταχύτητας με τη μετατόπιση και συμπεραίνει ότι από την σχέση U = at, έπεται η $S = (1/2)at^2$, και εγώ λέω, και αντιστρόφως. Δηλ., για να αποφανθεί ότι η υπό-

θεσή του είναι σωστή, πρέπει από την $S = (1/2)at^2$ να οδηγηθεί στην $U = at$. Αυτό λέει, κατ' ουσίαν στο διάλογο….

(33) **Παν.:** Όμως μαθηματικά απέδειξε ότι αν $U = at$, τότε $S = (1/2)at^2$ και όχι το αντίστροφο.

5. Παρατηρήσεις – συμπεράσματα σχετικές με τη δραστηριότητα 'Galileo Galilei'

Οι φοιτητές έχουν αποδείξει εύκολα το θεώρημα και το πόρισμα του Γαλιλαίου, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης, το γράφημα της ταχύτητας και τους λόγους εμβαδών των τριγώνων που αναπαριστούν τις αντίστοιχες μετατοπίσεις. Η απόδειξη, με σύγχρονο συμβολισμό, των σχετικών προτάσεων τους οδηγεί αβίαστα στο συμπέρασμα ότι «αν η ταχύτητα είναι ανάλογη του χρόνου τότε η διανυόμενη απόσταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου». Η προσπάθεια του ερευνητή (όπως φαίνεται από το απόσπασμα στην παραπάνω συνέντευξη) να τους οδηγήσει στην ισοδυναμία υπόθεσης και συμπεράσματος μέσω του Θεμελιώδους Θεωρήματος, δεν στάθηκε αρκετή να τους προσανατολίσει στην αναζήτηση της αντίστροφης πορείας. Είναι ενδεχόμενο να μη γίνεται κατανοητό από τους φοιτητές ότι μπορεί να συζητάμε για 'πειραματική' επιβεβαίωση ή όχι ενός μαθηματικού θεωρήματος.

Γενικότερα, σχετικά με τις νοητικές λειτουργίες των φοιτητών που έλαβαν μέρος στη δραστηριότητα που σχετίζεται με το πείραμα του Γαλιλαίου στο κεκλιμένο επίπεδο, έχουμε να σημειώσουμε τα εξής:

(α) Οι φοιτητές δε δυσκολεύθηκαν να αποδείξουν το 2ο θεώρημα του Γαλιλαίου σχετικά με την *'φυσικά'* επιταχυνόμενη κίνηση, χρησιμοποιώντας λόγους εμβαδών των ορθογωνίων τριγώνων που αναπαριστούν την κίνηση στο γράφημα της ταχύτητας-χρόνου.

(β) Λιγότεροι φοιτητές απέδειξαν το πόρισμα, παίρνοντας λόγους εμβαδών ευθύγραμμων σχημάτων στο γράφημα ταχύτητας – χρόνου.

(γ) Οι φοιτητές κατανόησαν ότι με δεδομένη την υπόθεση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης και της επαγόμενης γραμμικής συνάρτησης της ταχύτητας, προκύπτει η δευτεροβάθμια σχέση μετατόπισης– χρόνου. Ωστόσο, δεν κατάφεραν να ακολουθήσουν μια αντίστροφη πορεία συλλογισμών μέσω του κειμένου των διαλόγων από το βιβλίου του Γαλιλαίου, ώστε να απαντήσουν θετικά στην ερώτηση η οποία τέθηκε στο τέλος της δραστηριότητας, αν «μπορούμε να ισχυριστούμε ότι με αυτό το πείραμα ο Γαλιλαίος αποδεικνύει ότι η ελεύθερη πτώση των σωμάτων είναι ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση;». Οι φοιτητές δεν κατάφεραν να προσεγγίσουν την ουσία του θεμελιώδους θεωρήματος, που κατά τη γνώμη μας βρίσκεται στο διάλογο. Θεωρούμε ότι το κείμενο του Γαλιλαίου το οποίο αφορά στην ομαλή και ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση *('Τρίτη ημέρα'* από το *Διάλογοι για δύο νέες επιστήμες*, Galilei, 1954) μπορεί να αποτελέσει υλικό σχεδιασμού δραστηριοτήτων με στόχους: (α) να εισαχθούν οι φοιτητές στη επιστημονική μέθοδο μαθηματικής μελέτης της φύσης από τον Γαλιλαίο, και (β) μέσω αυτής, στην προσέγγιση του Θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού. Απαιτείται περαιτέρω έρευνα ως προς τους στόχους, το σχεδιασμό και την πειραματική εφαρμογή της πρότασης.

Παράρτημα

Θεώρημα ΙΙ, Πρόταση ΙΙ. (Galilei, 1954: 174)

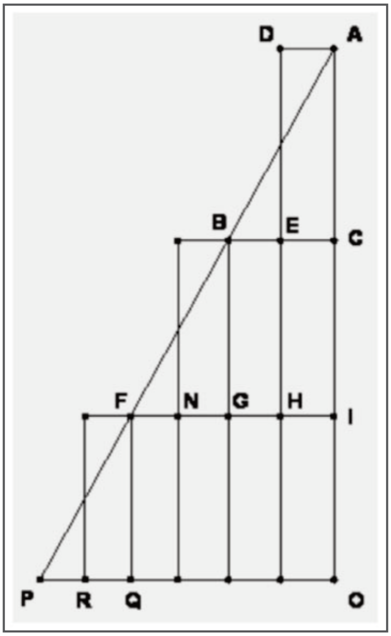
«Οι αποστάσεις που διανύονται από ένα σώμα που πέφτει με μια ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση [εκκινώντας] από την ηρεμία, είναι μεταξύ τους όπως τα τετράγωνα των χρονικών διαστημάτων που απαιτούνται προκειμένου να διανυθούν αυτές οι αποστάσεις».

....

(Galilei, 1954: 176):

«SAGR.: Παρακαλώ διακόψτε τη συζήτηση προς στιγμήν, διότι μόλις μου πέρασε από το μυαλό μια ιδέα την οποία θέλω να περιγράψω μέσω ενός διαγράμματος, προκειμένου να γίνει καθαρότερη σε σας και σε μένα.

Σχήμα 6



Έστω ότι η γραμμή ΑΙ αναπαριστά την πάροδο του χρόνου που μετράται από την αρχική στιγμή Α. Από το Α σχεδιάστε την ευθεία AF σχηματίζοντας οποιαδήποτε γωνία (σχ.6). Ενώστε τα τελικά σημεία Ι και F, διαιρέστε το χρόνο ΑΙ στο μισό με το C, σχεδιάστε την CB παράλληλη προς την IF. Ας θεωρήσουμε τη CB ως τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας η οποία αυξάνει από το μηδέν στην αρχή, σε απλή αναλογία προς τις τομές στο τρίγωνο ABC των γραμμών που άγονται παράλληλα προς την BC, ή πράγμα που είναι το ίδιο, ας υποθέσουμε (υπογράμμιση δική μου, Θ.Π.) *ότι η ταχύτητα αυξάνει ανάλογα προς το χρόνο. Τότε δέχομαι αναντίρρητα, από τη σκοπιά του προηγούμενου επιχειρήματος, ότι η διανυόμενη απόσταση από ένα σώμα που πέφτει με τον προαναφερθέντα τρόπο θα είναι ίση προς τη διανυόμενη απόσταση από το ίδιο σώμα το οποίο κι-*

νείται με σταθερή ταχύτητα ίση προς EC, τη μισή προς την BC, κατά τη διάρκεια του ίδιου χρονικού διαστήματος.

Επιπλέον ας φανταστούμε ότι το σώμα έχει πέσει με επιταχυνόμενη κίνηση έτσι ώστε, τη στιγμή C να έχει ταχύτητα BC.

Είναι καθαρό ότι αν το σώμα συνεχίζει να κατέρχεται με την ίδια ταχύτητα BC, χωρίς επιτάχυνση, θα διανύσει στο επόμενο χρονικό διάστημα CI, διπλάσια απόσταση από εκείνη που διανύθηκε στο χρονικό διάστημα AC, με ομαλή ταχύτητα EC η οποία είναι μισή της BC. Αλλά εφ' όσον το σώμα που πέφτει, αποκτά ίσες αυξήσεις ταχύτητας κατά τη διάρκεια ίσων αυξήσεων του χρόνου, έπεται ότι η ταχύτητα BC κατά τη διάρκεια του επόμενου χρονικού διαστήματος CI, θα αυξηθεί κατά μια ποσότητα που αναπαρίσταται από τις παράλληλες του τριγώνου BEG το οποίο είναι ίσο προς το τρίγωνο ABC. Αν τότε, κάποιος προσθέσει στη ταχύτητα GI το μισό της ταχύτητας FG, η μέγιστη ταχύτητα που αποκτάται από την επιταχυνόμενη κίνηση και ορίζεται από τις παράλληλες του τριγώνου BFG, θα έχει την ομοιόμορφη ταχύτητα με την οποία η ίδια απόσταση θα είχε διανυθεί στο χρόνο CI. Και εφ' όσον αυτή η ταχύτητα IN είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από την EC, έπεται ότι η διανυόμενη απόσταση κατά τη διάρκεια του [χρονικού] διαστήματος CI είναι τρεις φορές μεγαλύτερη από εκείνη που διανύεται κατά τη διάρκεια του διαστήματος AC. Ας φανταστούμε την κίνηση να εξελίσσεται περαιτέρω σ' ένα άλλο ίσο χρονικό διάστημα IO, και το τρίγωνο επεκτείνεται στο APO. Είναι τότε γεγονός ότι αν η κίνηση συνεχίζεται κατά τη διάρκεια του διαστήματος IO, με το σταθερό ρυθμό IF που αποκτήθηκε μέσω της επιτάχυνσης κατά τη διάρκεια του χρόνου AI, η διανυόμενη απόσταση κατά τη διάρκεια του διαστήματος IO θα είναι τετραπλάσια εκείνης που διανύθηκε στη διάρκεια του πρώτου [χρονικού] διαστήματος AC, διότι η ταχύτητα IF είναι τετραπλάσια της ταχύτητας EC. Αλλά αν μεγαλώσουμε το τρίγωνό μας έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε το FPQ το οποίο ισούται με το ABC, θεωρώντας ακόμα ότι η επιτάχυνση είναι σταθερή, θα προσθέσουμε στην ομοιόμορφη ταχύτητα μια αύξηση RQ, ίση προς την EC. Τότε η τιμή της ισοδύναμης ομοιόμορφης ταχύτητας κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος IO θα είναι πενταπλάσια από εκείνη του πρώτου χρονικού διαστήματος AC. Γι' αυτό η διανυόμενη απόσταση θα είναι πενταπλάσια από εκείνη του πρώτου διαστήματος AC. Έτσι, είναι γεγονός, με απλό υπολογισμό ότι ένα κινούμενο σώμα το οποίο εκκινεί από την ηρεμία και αποκτά ταχύτητα με ένα ρυθμό ανάλογο προς το χρόνο, θα διανύσει, κατά τη διάρκεια ίσων χρονικών περιόδων, αποστάσεις που σχετίζονται μεταξύ τους όπως οι περιττοί αριθμοί ξεκινώντας από τη μονάδα, 1, 3, 5, ..., ή θεωρώντας τη συνολική διανυόμενη απόσταση η οποία διανύεται σε διπλάσιο χρόνο θα είναι τετραπλάσια από εκείνη που διανύθηκε στη διάρκεια του μοναδιαίου χρόνου, σε τριπλάσιο χρόνο, η απόσταση είναι 9-πλάσια από εκείνη που διανύθηκε στο μοναδιαίο χρόνο. Και γενικά οι αποστάσεις που διανύθηκαν έχουν λόγο ίσο προς το τετράγωνο του λόγου των [αντίστοιχων] χρόνων».

(Δηλ. $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$, Θ.Π).

Σχολιάζοντας το κείμενο αυτό, έχουμε να παρατηρήσουμε:

1. Χρησιμοποιώντας τη σύγχρονη θεμελιώδη εξίσωση S = ½ gt^2, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας το θεώρημα προκύπτει άμεσα: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}gt_1^2}{\frac{1}{2}gt_2^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$.

   Το πόρισμα : S = ½ $g(t_2^2 - t_1^2)$ = ½ $g(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)$, με $t_2 - t_1 = 1$ (t_1, t_2 διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί) και $t_2 + t_1$ πάντα περιττός αριθμός.
2. Είναι χαρακτηριστική η απλότητα με την οποία αποδεικνύει το θεώρημα και το πόρισμα σ' αυτό το απόσπασμα, προσφεύγοντας μέσω του θεωρήματος μέσης τιμής στις αντίστοιχες ομαλές κινήσεις. Η αναπαράσταση χρόνου – ταχύτητας, παρ' ότι μοιάζει με εκείνην του Oresme, χρησιμοποιείται μόνο για την εφαρμογή του θεωρήματος της μέσης τιμής. Με χρονικά διαδοχικά διαστήματα σταθερά, σύμφωνα με την 2η πρότασή του στην ομαλή κίνηση: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{U_1}{U_2}$, και επειδή στο τέλος των αντίστοιχων ίσων χρονικών διαστημάτων ισχύει: $U_2 = 3U_1$, $U_3 = 5U_1$, $U_4 = 7U_1$, κοκ., με U_1 = BC/2, έπεται ότι $\frac{S_1}{1} = \frac{S_2}{3} = \frac{S_3}{5} = \frac{S_4}{7} = \ldots$
3. Στην τελευταία παράγραφο του κειμένου του, ο Γαλιλαίος αναφέρεται έμμεσα στη σειρά $1+3+5+ \ldots + 2\nu-1 = \nu^2$, την οποία συνδέει με το πόρισμα το οποίο με τη σειρά του προκύπτει από το θεώρημα της μέσης τιμής (Edwards, 1979: 90).

Βιβλιογραφία

Boyer, C. (1959) *The history of the Calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications, Inc.

Clagett, M. (1959) *Science of Mechanics in the Middle Ages.* Madison: The University of Wisconsin Press.

Clagett, M. (1968) *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of qualities and motion.* Madison: The University of Wisconsin Press.

Crombie, A. C. (μετ. Ιατρίδου Μ., Κούρτοβικ, Δ) (1992) *Από τον Αυγουστίνο στον Γαλιλαίο,* τόμος Β: *Η Επιστήμη στο Ύστερο Μεσαίωνα και στις Αρχές των Νέων Χρόνων (13ος – 17ος αιώνας)*, Αθήνα: Εκδόσεις Μορφωτικού Ιδρύματος Εθνικής Τράπεζας.

Edwards, H. C. (1979) *The Historical Development of the Calculus*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag.

Farmaki, V. & T. Paschos (2007) Employing genetic 'moments' in the history of Mathematics in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics,* Vol. 66 (1): 83-106.

Galilei Galileo (translation by Crew, H., Salvio, A.) (1954) *Dialogues Concerning Two New Science*. New York: Dover Publications, Inc; originally published in 1638.

Kaput, J. (1994) Democratizing Access to Calculus: New Routes to Old Roots. In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Assosiates, Inc. Publishers.

Paschos, T. & V. Farmaki (2007) The Integrating of genetic moments in the History of Mathematics and Physics in the designing of didactic activities aiming to introduce first-year undergraduates to concepts of Calculus. In Barbin, Stehlicova & Tzanakis (Eds), *History and Epistemology in Mathematics.* Prague: Proceedings of the 5th European Summer University, 297-310.

Πάσχος, Θ. (2007) *Ενσωμάτωση γενετικών στιγμών της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική προσέγγιση εννοιών της Μαθηματικής Ανάλυσης*. Αδημοσίευτη διδακτορική διατριβή, Μαθηματικό Τμήμα, ΕΚΠΑ.

Radford L., V. Katz, J-P.Dorier, O. Bekken & A. Sierpinska (2000) The role of historical analysis in predicting and interpreting students' difficulties in mathematics. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: An ICMI study*. The Netherlands Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 149–154.

Σταμάτης, Ε. (1975) *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία*. (Τόμος Ι). Αθήνα: Οργανισμός εκδόσεων σχολικών βιβλίων.

Tzanakis, C., A. Arcavi et al. (2000) Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study*. The Netherlands Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 201-240.