Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ[1]

Ευάγγελος Ν. Παναγιώτου
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Περιφερειακή Διεύθυνση Εκπαίδευσης Στερεάς Ελλάδας

Abstract

For more than three centuries, students encountered logarithms initially as a computational tool. Today, electronic calculation has obviated the need to teach computation with logarithms, and the first encounter with logarithms is often a rather abstract treatment of natural logarithms. This introduction seems out of the blue, with little connection to what the students have learned before. Here, we examine the historical development of logarithms, the remarkable individuals involved and their surprising discoveries, and we will suggest a possible implementation of this development to teaching. The proposed teaching sequence has been successfully undertaken twice with 16-17 year-old high school students (11th grade). With this approach logarithms seem less mysterious, more human, more understandable, and today's students find more "natural" the so-called natural logarithms.

Key words

Arithmetic and geometric progressions, history of mathematics, hyperbola, logarithm.

Περίληψη

Για περισσότερο από τρεις αώνες, οι μαθητές γνώρισαν τους λογαρίθμους ως ένα υπολογιστικό εργαλείο. Σήμερα, τα ηλεκτρονικά μέσα έχουν εξαλείψει την ανάγκη των υπολογισμών με λογαρίθμους και έτσι η πρώτη συνάντηση των μαθητών με την έννοια αυτή γίνεται με μια μάλλον αφηρημένη παρουσίαση των φυσικών λογαρίθμων. Η εισαγωγή αυτή φαίνεται ουρονοκατέβατη γιατί έχει ελάχιστη σχέση με ό,τι έχουν ήδη μάθει οι μαθητές. Φαίνεται λογικό να διδάξουμε τους λογαρίθμους διατρέχοντας τα βασικά σημεία της ιστορικής τους ανάπτυξης. Στην παρούσα εργασία θα εξετάσουμε την ιστορία των λογαρίθμων, τα αξιόλογα πρόσωπα που εμπλέκονται, καθώς και τις εντυπωσιακές τους ανακαλύψεις, και θα παρουσιάσουμε ένα πρόγραμμα αξιοποίησης αυτής της ιστορίας στη διδασκαλία. Αυτή η διδακτική ακολουθία έχει εφαρμοστεί δύο φορές στη Β'τάξη Λυκείου με αποτέλεσμα οι λογάριθμοι να φαίνονται

λιγότερο μυστηριώδεις, πιο ανθρώπινοι, πιο κατανοητοί και οι μαθητές να αντιλαμβάνονται πράγματι ως «φυσικούς» τους φυσικούς λογαρίθμους.

Λέξεις κλειδιά

Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος, ιστορία των μαθηματικών, υπερβολή, λογάριθμος.

0. Εισαγωγή

Η αρχική αιτία για την διδασκαλία των λογαρίθμων ήταν η χρησιμότητά τους στην γρήγορη και εύκολη εκτέλεση πολύπλοκων αριθμητικών υπολογισμών. Η αιτία αυτή δεν υπάρχει σήμερα, αφού οι μικροϋπολογιστές τσέπης και οι υπολογιστές έχουν απλοποιήσει το πρόβλημα των πράξεων με μεγάλους αριθμούς. Η πραγματικότητα επέβαλε μια αναθεώρηση των στόχων και του περιεχομένου της διδασκαλίας της ενότητας των λογαρίθμων.

Τα διδακτικά βιβλία αρχίζουν την εισαγωγή των λογαρίθμων με τον ορισμό που δόθηκε από τον Euler (1707-1783) το 1770, στο διάσημο βιβλίο του *Complete Introduction to Algebra*: *Ο λογάριθμος ενός θετικού αριθμού ως προς δεδομένη βάση, που υποτίθεται θετική, είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψωθεί η βάση για να προκύψει ο αριθμός* (Euler, 1984: 63–64). Έτσι, αν $x > 0$, ο λογάριθμος του x με βάση α, $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, συμβολίζεται με $\log_\alpha x$, και είναι εκείνος ο πραγματικός αριθμός y για τον οποίο είναι $\alpha^y = x$. Στη συνέχεια όμως δίνεται μεγαλύτερο βάρος στη συναρτησιακή μορφή της έννοιας του λογάριθμου: *Η εκθετική συνάρτηση* $f : R \rightarrow R_+^*$ *με* $f(x) = \alpha^x$ $(\alpha > 0)$ *είναι 1 – 1, οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση* f^{-1}. *Η* f^{-1} *λέγεται λογαριθμική συνάρτηση με βάση α και συμβολίζεται με* $\log_\alpha x$.

Έτσι, το υπολογιστικό μέρος της θεωρίας των λογαρίθμων πέρασε στο περιθώριο. Οι λογαριθμικοί πίνακες, που για αιώνες ήταν το εργαλείο για κάθε σοβαρό υπολογισμό, εντάχθηκαν στα αξιοπερίεργα και άχρηστα πια αντικείμενα. Στο προσκήνιο πέρασε η συναρτησιακή μορφή της έννοιας. Όμως ο μαθητής ή ο σπουδαστής δεν αντιλαμβάνεται για ποιο λόγο αναπτύσσεται η σχετική θεωρία μέσα σε μια παρουσίαση με πολλές διδακτικές αυθαιρεσίες, όπως είναι για παράδειγμα, το πως φθάσαμε στον ορισμό του λογαρίθμου, η εισαγωγή και σύνδεση του αριθμού e με τους λογαρίθμους και η αποδοχή βασικών αποτελεσμάτων χωρίς απόδειξη.

Αυτή η διαπίστωση υπονομεύει την πραγματική κατανόηση του προβλήματος. Ένας τρόπος για να κατανοήσουν οι μαθητές το πρόβλημα και να μην υποβαθμίσουν τις επιτυχίες του παρελθόντος είναι να ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη της έννοιας.

1. Η ιστορική διαδρομή μέχρι την δημιουργία των λογαρίθμων

Οι πρώτοι άνθρωποι κρατούσαν αριθμητικά στοιχεία κάνοντας χαρακιές πάνω σε ξύλα ή κόκαλα (π.χ. Struik, 1987). Κάθε χαρακιά αντιπροσώπευε μία μονάδα. Σχεδόν όλα τα συμβολικά συστήματα που ανέπτυξαν οι πρώτοι πολιτισμοί προέκυψαν από αυτό το απλοϊκό σύστημα απαρίθμησης στο οποίο πρόσθεσαν κάποια σύμβολα για να παριστάνουν μεγάλους αριθμούς διότι η επανάληψη ενός συμβόλου για την αναπαράσταση ενός μεγάλου αριθμού καταλαμβάνει πολύ χώρο και ο αριθμός δεν μπορεί να διαβαστεί εύκολα αφού πρέπει να απαριθμήσει κανείς όλες τις χαρακιές. Τα διάφορα συμβολικά συστήματα δεν είχαν όλα τον ίδιο βαθμό αποτελεσματικότητας. Μεταξύ των αρχαίων πολιτισμών οι μόνοι που ανέπτυξαν σύστημα όμοιο με το δικό μας δεκαδικό σύστημα ήταν οι Βαβυλώνιοι. Η εξέταση όλων των συστημάτων αποκαλύπτει ότι τα συστήματα αυτά ήταν ιδιαίτερα δύσχρηστα στην εκτέλεση όλων των βασικών αλγορίθμων, εκτός από αυτούς της πρόσθεσης και αφαίρεσης (π.χ., Resnikoff & Wells 1984, Van der Waerden 1961).

Η απλοποίηση που επέφερε το ινδο-αραβικό σύστημα στον λογισμό επαρκούσε στις συνήθεις καθημερινές περιστάσεις, όχι όμως και για τις ανάγκες των αστρονομικών υπολογισμών. Ανάγκες οι οποίες με την πάροδο του χρόνου αυξάνονταν καθώς οι απαιτήσεις από την αστρονομία για όλο και περισσότερο ακριβέστερες προβλέψεις έκαναν τους υπολογισμούς ακόμη πιο δύσκολους και χρονοβόρους. Έπρεπε να βρεθεί μέθοδος που θα συντόμευε και θα απλοποιούσε τις πιο πολύπλοκες πράξεις, τουλάχιστον αυτές του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με πολυψήφιους αριθμούς.

Στο τέλος του 16^{ου} αιώνα, η δυσκολία που συναντούσε όλος ο κόσμος στον πολλαπλασιασμό μεγάλων αριθμών οδήγησε αρχικά στην επινόηση μηχανικών τρόπων για την εκτέλεσή του. Οι πιο δημοφιλείς από τις μεθόδους που επινοήθηκαν για την εκτέλεση μεγάλων πολλαπλασιασμών είναι *η μέθοδος του δικτυωτού* και *η μέθοδος των ράβδων* του Napier (π.χ., Eves 1983, Παναγιώτου 2004). Με τους μηχανικούς αυτούς τρόπους υπολογισμού, η μόνη πράξη που είχε να κάνει τελικά ο υπολογιστής ήταν η πρόσθεση. Στην ιδέα αναγωγής του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση οφείλεται και *η τεχνική της προσθαφαίρεσης*, η οποία αξιοποιεί τους τύπους της τριγωνομετρίας που εκφράζουν το γινόμενο τριγωνομετρικών συναρτήσεων σαν αθροίσματα και διαφορές (*idem*).

Όμως, γενικά, οι δυνατότητες αυτών των μεθόδων ήταν περιορισμένες. Το μεγάλο βήμα για την επινόηση της έννοιας του λογάριθμου έγινε με τον συσχετισμό των όρων μιας γεωμετρικής και μιας αριθμητικής προόδου.

1.1. Μετατρέποντας τον πολλαπλασιαμό σε πρόσθεση συγκρίνοντας αριθμητικές με γεωμετρικές προόδους

Η χρησιμότητα της σύγκρισης των ακολουθιών των όρων δύο προόδων, μιας αριθμητικής και άλλης γεωμετρικής, είχε επανειλημμένα τραβήξει την προσοχή των μαθηματικών (Smith 1915). Ας θεωρήσουμε τις επόμενες δύο προόδους:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ....

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 ....

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το γινόμενο δύο όρων της γεωμετρικής (π.χ. 32 x 128 = 4096) βρίσκεται ακριβώς κάτω από το άθροισμα των αντίστοιχων όρων της αριθμητικής (5 + 7 = 12). Δηλαδή ο πολλαπλασιασμός ανάγεται ουσιαστικά σε πρόσθεση. Εύκολα διαπιστώνουμε επίσης ότι η διαίρεση ανάγεται σε αφαίρεση (4096 : 128 = 32 ↔ 12 – 7 = 5), η ύψωση σε δύναμη σε απλό πολλαπλασιασμό με τον εκθέτη ($16^3 = 4096 \leftrightarrow 4 \times 3 = 12$) και ο υπολογισμός ρίζας σε απλή διαίρεση με τον δείκτη ($\sqrt[4]{4096} = 8 \leftrightarrow 12 : 4 = 3$).

Στην παραπάνω αντιστοιχία, οι όροι της γεωμετρικής προόδου είναι:

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}, \ldots$

και οι όροι της αριθμητικής προόδου είναι ακριβώς οι εκθέτες των αντιστοίχων δυνάμεων του 2 που δίνουν τους όρους της γεωμετρικής προόδου. Επομένως οι προηγούμενες αναγωγές εκφράζονται με τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων. Τον 16ο αιώνα όμως δεν υπήρχε κάποιος κοινά αποδεκτός συμβολισμός για τις δυνάμεις και είναι πράγματι ένα από τα παράδοξα των μαθηματικών το γεγονός ότι οι λογάριθμοι ανακαλύφθηκαν πριν καθιερωθούν οι δυνάμεις. Σήμερα, είναι φανερό ότι οι όροι της αριθμητικής προόδου είναι οι λογάριθμοι των αντίστοιχων όρων της γεωμετρικής με βάση το 2 και γράφουμε: $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 64 = 6$, $\log_2 256 = 8$, ... Ο όρος «λογάριθμος» οφείλεται στον Napier και σημαίνει ακριβώς: ο αριθμός που μετράει τους λόγους. Πράγματι, στην παραπάνω αντιστοιχία ο αριθμός 6 που αντιστοιχεί στο 64 δείχνει «πόσοι λόγοι» χρειάζονται στη συνεχή αναλογία

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \frac{64}{32} = \ldots$$

για να φτάσουμε στον όρο 64 (την εποχή του Napier, η γεωμετρική πρόοδος ορίζονταν σαν μια ακολουθία αριθμών που βρίσκονται σε *συνεχή αναλογία*).

Με την παραπάνω αντιστοίχιση έχει λυθεί το πρόβλημα των πράξεων μόνο για ορισμένους προνομιούχους αριθμούς, τους ακεραίους που είναι δυνάμεις του 2. Βεβαίως, θα μπορούσαμε να αυξήσουμε τις δυνατότητές μας αν αντικαθιστούσαμε τη γεωμετρική πρόοδο με τους ακεραίους που είναι δυνάμεις του 3, δυνάμεις του 4, κλπ. Σε κάθε περίπτωση, το γενικό σχήμα είναι:

0	1	2	3	4	5	6	7 …
1	λ	λ^2	λ^3	λ^4	λ^5	λ^6	λ^7 …

Σημειώστε ότι είναι ουσιαστικό το 1 της γεωμετρικής προόδου να αντιστοιχεί στο 0 της αριθμητικής.

Όμως, ακόμη και αν είχαμε μια άπειρη λίστα γεωμετρικών προόδων, θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε δύο αριθμούς μόνο στην περίπτωση που και οι δύο ανήκουν στην ίδια γεωμετρική πρόοδο. Από την έως τώρα διαπραγμάτευση του θέματος προκύπτει ότι μια λύση του προβλήματος στα πλαίσια των προόδων θα είχε πρακτική αξία αν η γεωμετρική πρόοδος ήταν αρκετά «πυκνή», ώστε ανάμεσα στους όρους της να μπορούν να βρεθούν όλοι ή σχεδόν όλοι οι αριθμοί. Ο Σκωτσέζος J. Napier ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε και δημοσίευσε μια τέτοια πυκνή πρόοδο.

1.2. Οι λογάριθμοι του John Napier: Μια «πυκνή» πρόοδος

Ο John Napier (1550-1617) θέλησε να αντιμετωπίσει την δυσκολία του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης ημιτόνων. Ίσως γι' αυτό το λόγο περιόρισε αρχικά τους λογαρίθμους μόνο σε λογαρίθμους των ημιτόνων γωνιών. Για να αποφύγει δε τις δυσκολίες με τα κλάσματα θεώρησε ως ανεξάρτητη μεταβλητή την $x = 10^7$ ημφ, δεδομένου ότι ο καλύτερος πίνακας ημιτόνων που είχε στη διάθεσή του έδινε τους αριθμούς με επτά δεκαδικά ψηφία. Η γωνία φ κυμαίνεται από 0^o έως 90^o και δίνεται σε λεπτά αφού τα όργανα της εποχής δεν επέτρεπαν μεγαλύτερη ακρίβεια. Επειδή 10^7 ημ90^o = 10^7 και 10^7 ημ1′ = 2909, συμπεραίνουμε ότι τα «ημίτονα» του Napier ήταν ακέραιοι μεταξύ του 2909 και 10.000.000.

Ο Napier άρχισε με τις προόδους του πίνακα 1. Η γεωμετρική πρόοδος έχει πρώτο όρο $\alpha_0 = 10^7$ και λόγο $\lambda = 1 - 10^{-7} = 0,9999999$. Η επιλογή λόγου πολύ κοντά στο 1 ήταν μια έξυπνη ιδέα διότι έκανε την πρόοδο πολύ ''πυκνή'' και επί πλέον, η συγκεκριμένη επιλογή, επέτρεπε τον εύκολο υπολογισμό των όρων της προόδου. Πράγματι

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda = \alpha_\nu (1 - 10^{-7}) = \alpha_\nu - \frac{\alpha_\nu}{10.000.000},$$

δηλαδή κάθε όρος προέκυπτε από τον προηγούμενό του αφαιρώντας το ένα δεκάκις εκατομμυριοστό του. Έτσι,

$\alpha_0 = 10^7 = 10\ 000\ 000.0000000$

$\alpha_1 = \alpha_0 - \alpha_0 10^{-7} = 10^7 - 1 = 9\ 999\ 999.000\ 000\ 0$

$\alpha_2 = \alpha_1 - \alpha_1 10^{-7} = 9\ 999\ 999 - 0.999\ 999\ 9 = 9\ 999\ 998.000\ 000\ 1$

Συνεχίζοντας έτσι βρήκε ότι ο εκατοστός όρος της γεωμετρικής προόδου είναι ο 9 999 900.000 495 0.

Πίνακας 1: Οι αρχικές πρόοδοι του Napier

Α.Π. β_ν=Nlogα	0	1	2	3	…	ν	..
Γ.Π. (α_ν)	10	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$ ‖ 9999999,0000000	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$ ‖ 9999998,0000001	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^3$ ‖ 9999997,0000003	…	$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^\nu$	..

Αν ο Napier συνέχιζε με αυτόν τον τρόπο, θα χρειαζόταν να υπολογίσει 81.425.000 όρους, περίπου, για να φτάσει στον 2909. Στη συνέχεια έπρεπε να υπολογίσει τους λογαρίθμους όλων των «ημιτόνων» που υπήρχαν ανάμεσά τους. Αυτό σήμαινε ότι είχε να εκτελέσει ένα συντριπτικό όγκο υπολογισμών. Όμως η ευφυΐα του Napier τον οδήγησε να υπολογίσει τελικά μόνο 1600 βασικά σημεία αναφοράς αντί για 81.425.000!! (π.χ., Ayoub 1993, Edwards 1979, Panagiotou 2011). Στο επόμενο βήμα έπρεπε να υπολογίσει τους λογαρίθμους αυτών των αριθμών. Αυτό θα μπορούσε να γίνει σχετικά εύκολα με τη μέθοδο της γραμμικής παρεμβολής. Ωστόσο, ο Napier είχε επίγνωση (τουλάχιστον διαισθητικά) της μη γραμμικότητας της λογαριθμικής συνάρτησης και γι αυτό χρησιμοποίησε ένα άλλο έξυπνο τρόπο παρεμβολής. Για τους σκοπούς αυτής της μη γραμμικής παρεμβολής ο Napier χρειαζόταν ένα «συνεχή» ορισμό των λογαρίθμων και όχι ένα διακριτό ορισμό βασισμένο στις προόδους (τα *ίδια*). Μια υποθετική πορεία της σκέψης του Napier από το πλαίσιο των προόδων στον τελικό ορισμό με όρους συνεχούς κίνησης σημείων περιγράφεται από τον Lord Moulton (1915).

Ο Napier, το 1614, δημοσίευσε στο Εδιμβούργο το έργο του *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (=Περιγραφή του θαυμαστού κανόνα των λογαρίθμων) που περιείχε πίνακες και οδηγίες για την χρησιμοποίησή τους αλλά δεν έδινε τις αποδείξεις των ισχυρισμών (Napier 1614). Μετά το θάνατό του Napier, εκδόθηκε το 1619 το βιβλίο του με τίτλο *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (= Κατασκευή του θαυμαστού κανόνα των λογαρίθμων), στο οποίο δίνονται οι αποδείξεις των ισχυρισμών καθώς και τα ίδια τα βήματα για την κατασκευή των πινάκων (Napier 1619). Η διαπραγμάτευση του θέματος ακολουθώντας τον Napier όχι μόνο δεν θα έχει για τους μαθητές όφελος ανάλογο με τις δυσκολίες που θα συναντήσουν αλλά οι τεχνικές που χρησιμοποίησε μπορεί και να αποπροσανατολίσουν τους μαθητές και να ξεχάσουν το βασικό στόχο που είναι να θέσουμε σε αντιστοιχία τους όρους μιας αριθμητικής προόδου με τους όρους μιας ''πυκνής'' γεωμετρικής προόδου (Panagiotou 2011: 11-13). Αν και λίγα έχουν μείνει από την αρχική ιδέα (πίνακας) είναι προτιμότερο να μείνουμε σε αυτόν τον ορισμό.

Στο λογαριθμικό σύστημα του Napier (Πίνακας 1) δεν υπάρχει η έννοια της βάσης, στην οποία στηρίζεται ο σύγχρονος ορισμός. Απλά, οι όροι μιας γεωμετρικής προόδου έχουν αντιστοιχηθεί με τους όρους μιας αριθμητικής προόδου και οι όροι της αριθμητικής προόδου ονομάστηκαν λογάριθμοι των αντίστοιχων όρων της γεωμετρικής προόδου. Κατά τον Napier *"Logarithmi dici possunt numerorum proportionalium comites aequidifferentes"* (Λογάριθμοι είναι αριθμοί με σταθερή διαφορά που έχουν αντιστοιχηθεί με αριθμούς σε συνεχή αναλογία) (Cajori 1913: 7)

Αυτή η περιγραφή χαρακτηρίζει όλα τα λογαριθμικά συστήματα του $17^{ου}$ αιώνα και ιδιαίτερα αυτά πριν το 1649 (Πίνακας 2) (Burn 2001).

Πίνακας 2: Μερικά από τα λογαριθμικά συστήματα του $17^{ου}$ αιώνα

	Γεωμετρική πρόοδος	Αριθμητική πρόοδος
Napier, 1614	$10^7 (1 - 10^{-7})^{\nu}$	ν
Briggs, 1617	10^{ν}	ν
Speidell, 1619	$10^7 (1 - 10^{-7})^{\nu}$	$(10^8 - \nu) / 10^2$
Bürgi, 1620	$10^8 (1 + 10^{-4})^{\nu}$	$10\,\nu$
Kepler, 1624	$10^5 (1 - 10^{-5})^{\nu}$	ν
Cavalieri, 1632	10^{ν}	$10 + \nu$
Caramuel, 1670	10^{ν}	$10 - \nu$

Το σύστημα του Napier μπορεί να συγκριθεί με τα σημερινά αν αντικαταστήσουμε τις προόδους που χρησιμοποίησε με αυτές που προκύπτουν αν διαιρέσουμε όλους τους όρους και των δύο προόδων με 10^7 (πίνακας 3). Το νέο σύστημα έχει βάση α = $\left(1-10^{-7}\right)^{10^7} \cong 0{,}367879422$, η οποία αντιστοιχεί στο 1 της αριθμητικής προόδου, και το 1 της γεωμετρικής αντιστοιχεί στο 0 της αριθμητικής.

Πίνακας 3: Τροποποίηση των προόδων του Napier για την ανάδειξη της σχέσης τους με τους φυσικούς λογαρίθμους

Α.Π.	0	$10^{-7}\cdot 1$	$10^{-7}\cdot 2$	. . .	$10^{-7}\cdot \nu$	. . .
Γ.Π.	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^0$ $\parallel$ 1	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^1$ $\parallel$ $0{,}9999999$	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^2$	. . .	$\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^\nu$	. . .

Η βάση α συμπίπτει σε 8 ψηφία με την τιμή του $\frac{1}{e} \cong 0{,}367879441$. Επομένως, με σύγχρονο συμβολισμό, μπορούμε να γράψουμε κατά προσέγγιση ότι:

$$\log_{1/e}\left(1-10^{-7}\right)^{\nu} = 10^{-7}\nu \;\Leftrightarrow\; \log_{1/e}\frac{\alpha_\nu}{10^7} = \frac{\beta_\nu}{10^7} \qquad (1)$$

Στο σύστημα του Napier έχουμε (πίνακας 1) Nlog $\alpha_\nu = \beta_\nu$, και η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\mathrm{N}\log\alpha_\nu = \beta_\nu = 10^7 \log_{1/e}\frac{\alpha_\nu}{10^7} \Leftrightarrow \mathrm{N}\log\alpha_\nu = \beta_\nu = -10^7 \ln\frac{\alpha_\nu}{10^7} \qquad (2)$$

Αν θέσουμε $x = \frac{\alpha_\nu}{10^7}$ και $y = \frac{\beta_\nu}{10^7}$, τότε η εξίσωση (2) γίνεται:

$$\mathbf{y = -\ln x} \qquad (3)$$

Επομένως, αν οι όροι της γεωμετρικής και της αριθμητικής προόδου διαιρεθούν με 10^7, τότε οι λογάριθμοι του Napier είναι ουσιαστικά οι αντίθετοι των φυσικών λογαρίθμων.

Επανερχόμενοι στο σύστημα του Napier, παρατηρούμε ότι το βασικότερο μειονέκτημά του είναι ότι Nlog1 $\neq 0$, αφού Nlog1 $= 10^7 \ln 10^7$. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην ισχύει η βασική λογαριθμική ιδιότητα Nlog(xy) = Nlogx + Nlogy αλλά το εξής:

$$\mathrm{Nlog}(xy) = \mathrm{Nlog}x + \mathrm{Nlog}y - \mathrm{Nlog}1.$$

Ο Napier απέδειξε αυτή τη βασική σχέση γεωμετρικά. Η ορθότητά της μπορεί να ελεγθεί με την βοήθεια της σχέσης (2). Ο Napier είχε αντιληφθεί το πρόβλημα και προς το τέλος της ζωής του, πρότεινε στον Άγγλο μαθηματικό Henry Briggs (1561 – 1631), καθηγητή στο κολέγιο Gresham του Λονδίνου, ότι η διαδικασία θα μπορούσε να απλοποιηθεί σημαντικά αν το 1 ήταν όρος της γεωμετρικής προόδου και αντιστοιχιζόταν στο 0 της αριθμητικής. Ο Briggs, σε συνεργασία με τον Napier, ανέλαβε να κατασκευάσει τους νέους πίνακες. Το αποτέλεσμα ήταν οι λογάριθμοι με βάση το 10, που σήμερα ονομάζουμε δεκαδικούς. Το 1624 ο Briggs δημοσίευσε το έργο του *Arithmetica Logarithmica* με τους νέους πίνακες λογαρίθμων των πρώτων 20 χιλιάδων φυσικών καθώς και των φυσικών από το 90000 μέχρι το 100000. Το κενό συμπληρώθηκε το 1628 από τον Ολλανδό βιβλιοπώλη και εκδότη Adriaen Vlacq (1600-1666). Οι τελευταίοι πίνακες ήταν η βασική μέθοδος απλοποίησης των υπολογισμών για τους επόμενους τρεις αιώνες.

1.3. Gregory of St-Vincent & A. A. de Sarasa: οι λογάριθμοι και η ορθογώνια υπερβολή

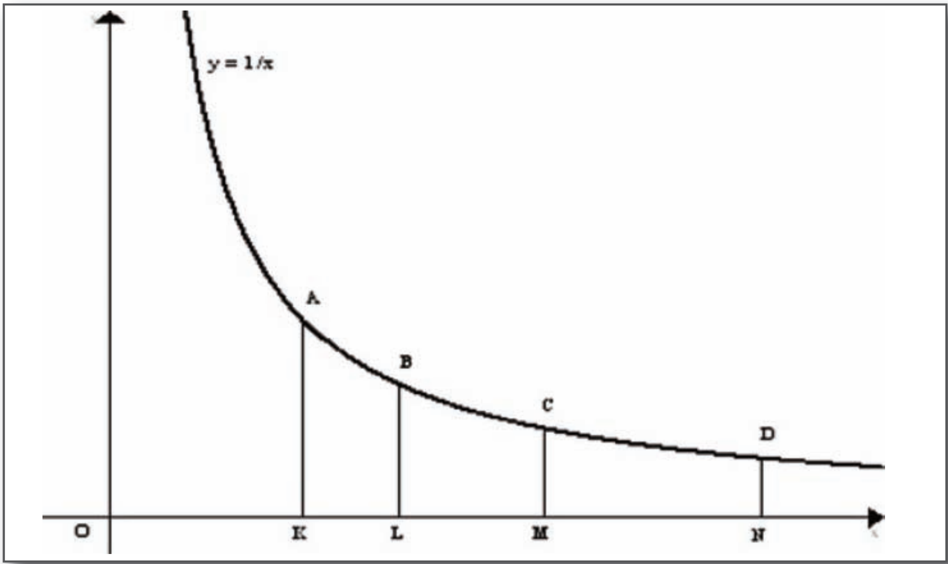
Οι λογαριθμικοί πίνακες διευκόλυναν αφάνταστα τους αριθμητικούς υπολογισμούς αλλά η σπουδαιότητα των λογαρίθμων στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού οφείλεται στη σύνδεση των λογαρίθμων με την ορθογώνια υπερβολή $xy = 1$. Ο Βέλγος Ιησουίτης Gregory of St-Vincent (1584-1667) έγραψε το σημαντικό έργο του *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni* (Antwerp 1647) με σκοπό την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου. Την εποχή αυτή σχεδόν κανείς πλέον δεν πίστευε στην δυνατότητα επίλυσης αυτού του προβλήματος και έτσι δεν ήταν λίγοι εκείνοι που ανέλαβαν το δύσκολο έργο του εντοπισμού κάποιου λάθους σε ένα βιβλίο που είχε 1200 σελίδες, ίσως το πιο πολυσέλιδο βιβλίο μαθηματικών που εκδόθηκε ποτέ. Τέσσερα χρόνια αργότερα, ο Christiaan Huygens (1651) βρήκε τελικά ένα σοβαρό λάθος στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου, στη σελίδα 1121. Το βιβλίο όμως περιείχε πολλά άλλα σημαντικά αποτελέσματα. Ένα από αυτά υπήρχε στην ενότητα που εξετάζει τις ιδιότητες των κωνικών τομών και αποδεικνύει την επόμενη πρόταση, η οποία δίνει, για πρώτη φορά στην ιστορία των μαθηματικών, την λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής:

> *Έστω Ox και Oy οι ασύμπτωτες της υπερβολής ABD. Διαιρέστε την Ox, ώστε OK, OL, OM, ON να είναι σε συνεχή αναλογία. Τότε, τα μεικτόγραμμα σχήματα ABLK, BCML, CDNM έχουν ίσα εμβαδά.* (Σχ.1) [Πρόταση 130 στο Βιβλίο 6 του *Opus Geometricum* (Burn 2001: 2)].

Το ότι τα τμήματα είναι σε συνεχή αναλογία σημαίνει, όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, ότι αποτελούν γεωμετρική πρόοδο. Έτσι, μπορούμε να ξαναδιατυπώσουμε την πρόταση ως εξής:

> *Αν τα τμήματα OK, OL, OM, ON είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε τα εμβαδά (ABLK), (BCML), (CDNM) είναι ίσα.*

Σχήμα 1: Η λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής



Ο Gregory περιορίστηκε σε δύο διαδοχικές λωρίδες και απέδειξε ότι έχουν ίσα εμβαδά χρησιμοποιώντας μια διαδικασία ανάλογη με το σύγχρονο ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος (Burn 2001; Dhombres 1993).

Θα περίμενε κανείς ότι σ' αυτό το σημείο θα έκαναν την εμφάνισή τους οι λογάριθμοι. Όμως ο Gregory δεν αναφέρεται πουθενά στους λογαρίθμους, αν και ο Napier είχε χρησιμοποιήσει τον όρο αυτό από το 1614 και μάλιστα με την ίδια σημασία. Τη σχέση των υπερβολικών εμβαδών με τους λογαρίθμους επισημαίνει ο Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667) στο βιβλίο του *Solutio problematis a R.P. Marino Mersenno propositi* (Antwerp 1649), όπου επαναδιατυπώνει την βασική πρόταση ως εξής:

> *"Αν η Οχ διαιρεθεί έτσι ώστε τα τμήματα OK, OL, OM, ON να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά (ABLK), (ACMK), (ADNK) αποτελούν αριθμητική πρόοδο, και αντιστρόφως".*

Έτσι δημιουργεί μια αντιστοιχία ανάμεσα στους όρους δύο προόδων της αριθμητικής (ABLK), (ACMK), (ADNK) και της γεωμετρικής OK, OL, OM, ON:

Πίνακας 4: Οι δύο φυσικές πρόοδοι του Gregory

0	(ABLK)	(ACMK)	(ADNK)
OK	OL	OM	ON

Υπάρχει δηλαδή η βασική αρχή ενός λογαριθμικού συστήματος, του οποίου όμως οι λογάριθμοι έχουν μια **φυσική** σημασία: εκφράζουν τα εμβαδά συγκεκριμένων γεωμετρικών σχημάτων.

Η διαπίστωση της σχέσης των λογαρίθμων με τα εμβαδά κάτω από την υπερβολή χρησιμοποιήθηκε τα επόμενα χρόνια πρακτικά αλλά και θεωρητικά: στην πράξη για την κατασκευή λογαριθμικών πινάκων και στη θεωρία οδήγησε στον ορισμό του λογαρίθμου κάθε θετικού αριθμού. Αρχικά δημιουργήθηκε το ερώτημα: κάθε εμβαδό κάτω από την υπερβολή είναι λογάριθμος; Ο Isaac Newton, σε ένα χειρόγραφό του το 1667, γράφει την εξίσωση της υπερβολής στη μορφή $y = 1/(1+x)$ και, κάνοντας τη διαίρεση, την αναπτύσσει σε άπειρη σειρά (Whiteside 1967–1976, vol. II: 184–189):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνει κατά όρους. Θα έπρεπε έτσι να πάρει τη λογαριθμική σειρά:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad , \quad |x| < 1$$

Ο Newton είναι προσεκτικός και δεν αναφέρεται σε λογαρίθμους και αντί για $\ln(1+x)$ γράφει $A(1+x)$ για το εμβαδό κάτω από την υπερβολή $y = 1/(1+x)$ και πάνω από το διάστημα $[0, x]$. Ισχυρίζεται όμως ότι τα εμβαδά κάτω από την υπερβολή έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τους λογαρίθμους και κατασκευάζει ένα μικρό πίνακα λογαρίθμων με 57 δεκαδικά ψηφία (Edwards 1979: 160).

Ο Nicolaus Mercator (1620-1687), στο έργο του *Logarithmotechnica* (London, 1668), καταλήγει στις ίδιες σειρές και, για διάκριση από τους δεκαδικούς λογαρίθμους, χρησιμοποιεί τον όρο «φυσικοί λογάριθμοι». Προσδιόρισε δε τον παράγοντα 0,43429 με τον οποίο πολλαπλασιαζόμενοι οι λογάριθμοι αυτοί μετατρέπονται σε δεκαδικούς. Το σύμβολο ln χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1893 από τον Irving Stringham (1847-1909) (Cajori 1928, v.2: 107)

Το τελικό αποτέλεσμα αυτών των εργασιών ήταν ότι για να περάσει κανείς από τους λογάριθμους του A.A de Sarasa στους σημερινούς φυσικούς λογάριθμους μπορούσε να χρησιμοποιήσει την υπερβολή $y = 1/x$ και το εμβαδόν κάτω από αυτή για να ορίσει τον λογάριθμο **συνεχώς**, δηλαδή να ορίσει τον λογάριθμο κάθε θετικού αριθμού. Ήταν αναγκαίο να πάρει $\log 1 = 0$. Αυτό θα καθόριζε την αρχή για την μέτρηση των εμβαδών και επί πλέον θα εξασφάλιζε την σχέση $\log(xy) = \log x + \log y$. Ο γνωστός τύπος ολοκλήρωσης

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \ln x$$

ο οποίος σε πολλά Πανεπιστημιακά συγγράμματα χρησιμοποιείται για τον ορισμό των φυσικών λογαρίθμων, ικανοποιεί τις προηγούμενες σκέψεις και υποδεικνύει σήμερα την καταγωγή των λογαρίθμων.

Ποια είναι η βάση αυτού του συστήματος; Θα έπρεπε να είναι κάποιος αριθμός x ώστε το εμβαδόν κάτω από την ορθογώνια υπερβολή $xy = 1$ από το 1 μέχρι τον αριθμό x να είναι ίσο με 1. Ο αριθμός αυτός x είναι το e και αυτή είναι η ιδιότητα που κάνει το e βάση των φυσικών λογαρίθμων. Οι πρώτες εμφανίσεις του e στα μαθηματικά πέρασαν απαρατήρητες. Είδαμε ότι η ''βάση'' των λογαρίθμων του Napier συνέπιπτε σε 8 ψηφία με την τιμή του 1/e. Όμως η ανάπτυξη των λογαρίθμων εκείνη την εποχή δεν στηριζόταν στην έννοια της βάσης και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα ο αριθμός e να παραμένει ασύλληπτος αν και ουσιαστικά ήταν κρυμμένος στη γωνία. Ο κεντρικός ρόλος του e στην Ανάλυση τονίζεται για πρώτη φορά από τον Leonard Euler (1707-1783) στο έργο του *Introductio in analysin infinitorum* (Berlin 1748) (Euler 1748/1990). Το e οφείλεται στον Euler που το χρησιμοποίησε για πρώτη φορά το 1728 σε ένα χειρόγραφό του (Maor 1994: 156). Υπάρχουν πολλές απόψεις για την επιλογή του γράμματος e από τον Euler. Σύμφωνα με μια από αυτές, ο Euler το επέλεξε επειδή είναι το πρώτο γράμμα της λέξης εκθετικός (exponential). Κατά μια άλλη το e προέρχεται από την λέξη ein (ένα στα Γερμανικά) ή einheit (μονάδα), η οποία εκφράζει την βασική ιδιότητα του ορισμού του e (ένας αριθμός που έχει λογάριθμο μονάδα). Πιο πιθανή φαίνεται να είναι η άποψη ότι το e είναι το επόμενο φωνήεν μετά το a, διότι ο Euler χρησιμοποιούσε φωνήεντα για να συμβολίζει τις σταθερές και στην εργασία του είχε ήδη χρησιμοποιήσει το a. Η άποψη ότι ο Euler επέλεξε το e επειδή ήταν το αρχικό του ονόματός του φαίνεται τελείως αβάσιμη διότι ήταν ένας πολύ σεμνός άνθρωπος, ο οποίος δεν επεδίωκε την προβολή του και μάλιστα σε τέτοιο σημείο που συχνά καθυστερούσε την έκδοση μιας εργασίας του ώστε το αποτέλεσμά της να κατοχυρωθεί σε κάποιο συνάδελφο ή φοιτητή (Maor 1994: 156).

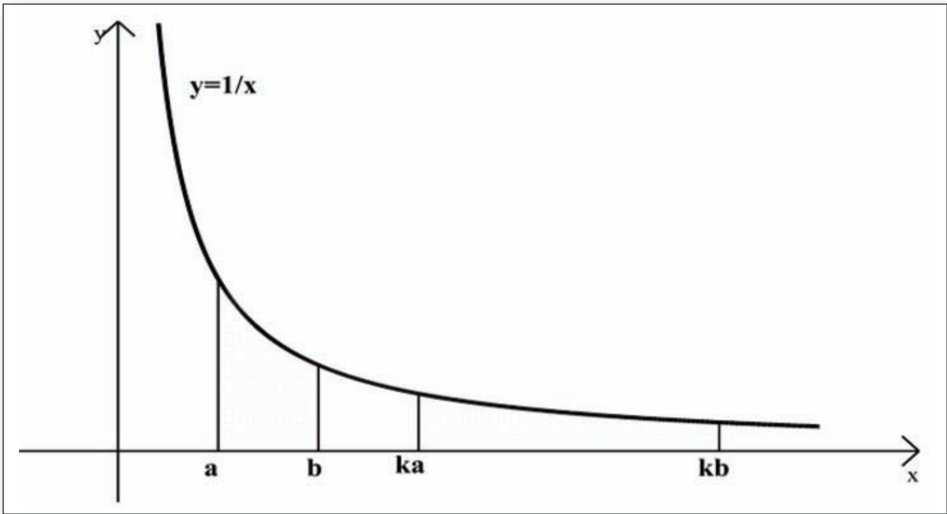
2. Τυπική παρουσίαση της θεωρίας

Αρχίζουμε με την ιστορική εκείνη πρόταση του Gregory of Saint Vincent στην οποία είχε, ουσιαστικά, αποδειχθεί, η λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής (§1.3). Εδώ διατυπώνουμε την πρόταση με ένα ισοδύναμο τρόπο, ο οποίος χρησιμοποιείται πιο αποτελεσματικά στα επόμενα.

Πρόταση του Gregory of St-Vincent. Για $0 < a < b$ θέτουμε $E_{a,b}$ = το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του άξονα των x, των ευθειών $x = a$, $x = b$ και της υπερβολής $y = 1/x$. Τότε για $k > 0$ ισχύει (Σχ. 2)

$$E_{ka,kb} = E_{a,b}$$

Σχήμα 2: Το εμβαδόν κάτω από την υπερβολή και μεταξύ a και b είναι ίσο με αυτό μεταξύ ka και kb ($1<a<b$)



Απόδειξη.

Για να συγκρίνουμε αναλυτικά τα δύο εμβαδά, διαιρούμε κάθε διάστημα [a, b] και [ka, kb] σε n υποδιαστήματα ίσου μήκους και προσεγγίζουμε κάθε εμβαδόν με n ορθογώνια. Αποδεικνύεται ότι τα ορθογώνια σε κάθε διάστημα έχουν το ίδιο άθροισμα εμβαδών και, καθώς το ν αυξάνεται $E_{a,b} = E_{ka,kb}$ (π.χ., Panagiotou 2011).

Πόρισμα. Αν τα τμήματα OK, OL, OM, ON αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, τότε τα εμβαδά (ABLK), (ACMK), (ADNK) αποτελούν αριθμητική πρόοδο (Σχ. 1).

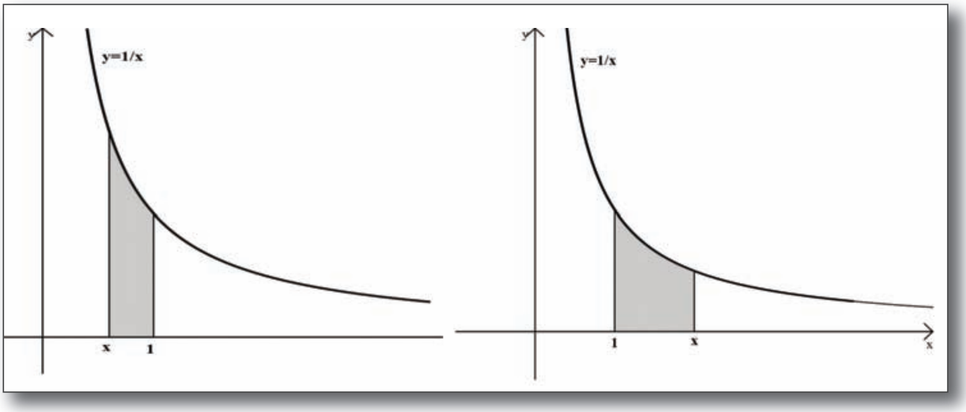
Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $OK = 1$, $OL = \lambda$, $OM = \lambda^2$, $ON = \lambda^3$. Τότε τα εμβαδά (ABLK) = $E_{1,\lambda}$, (BCML) = E_{λ,λ^2}, (CDNM) = E_{λ^2,λ^3}, είναι ίσα μεταξύ τους σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Άρα τα εμβαδά (ABLK), (ACMK), (ADNK) αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Όλη η μέχρι τώρα συζήτησή μας δικαιολογεί τον επόμενο ορισμό:

Ορισμός

$$\ln x = \begin{cases} E_{1,x} & , \text{αν } x > 1 \\ 0 & , \text{αν } x = 1 \\ -E_{x,1} & , \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

Σχήμα 3: Ο ορισμός του φυσικού λογαρίθμου

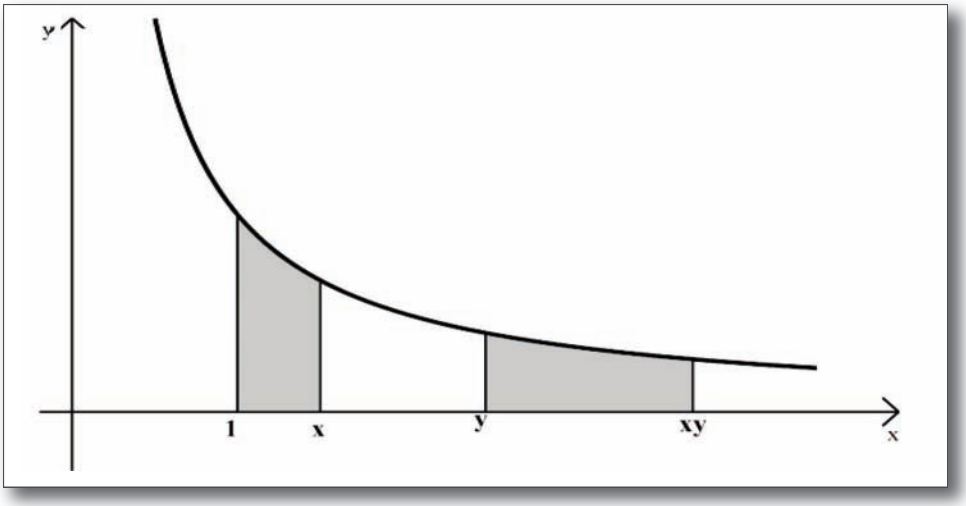


Αποδεικνύουμε τη βασική ιδιότητα της λογαριθμικής συνάρτησης της μετατροπής του πολλαπλασιασμού σε πρόσθεση.

Πρόταση. Αν x, y > 0, τότε **ln(xy) = lnx + lny**

Απόδειξη.

Σχήμα 4: ln(xy) = lnx + lny



Έστω $1 < x \leq y$. Τότε $xy > x$ και $xy > y$ (Σχ. 4). Οπότε

$$L(xy) = E_{1,xy} = E_{1,y} + E_{y,xy} = L(y) + E_{y,xy} \qquad (1)$$

Όμως, από πρόταση του Gregory, προκύπτει ότι

$$E_{y,xy} = E_{1,x} \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) παίρνουμε $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Όμοια αποδεικνύονται και οι περιπτώσεις: $0 < x \leq y \leq 1$ και $0 < x \leq 1 \leq y$.

Πόρισμα.

(α) Αν $x>0$ και ρ ρητός αριθμός, τότε $\ln(x^{\rho}) = \rho \ln x$

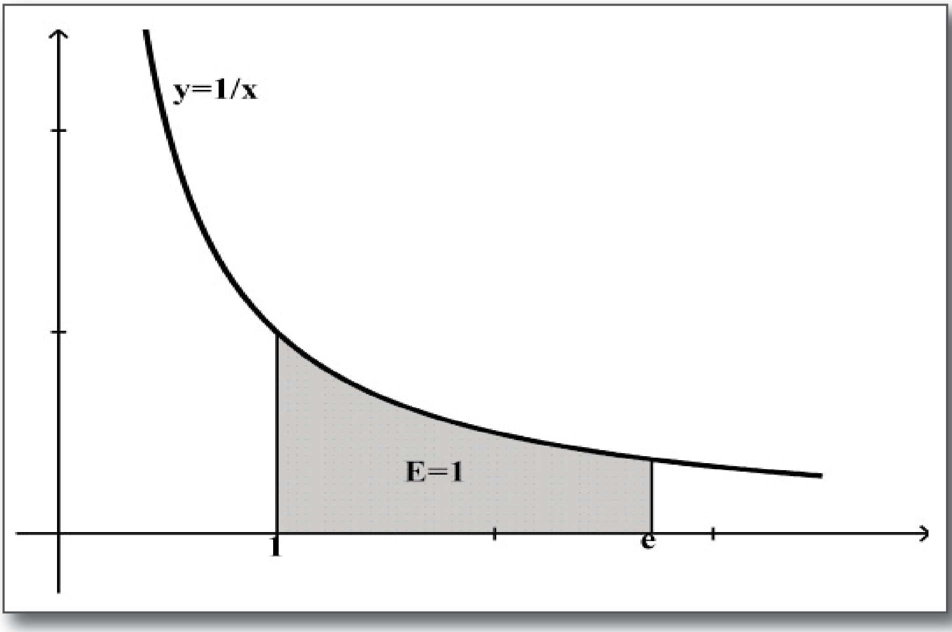
(β) Αν $x, y > 0$, τότε $\ln(x/y) = \ln x - \ln y$

Η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη.

Ορισμός του αριθμού e.

Η λογαριθμική συνάρτηση $y = \ln x$ είναι γνήσια αύξουσα και δεν είναι φραγμένη άνω ή κάτω (π.χ., Panagiotou 2011). Είναι διαισθητικά σαφές ότι η γραφική παράσταση τέμνει κάθε οριζόντια γραμμή $y = y_0$ σε ένα ακριβώς σημείο. Επομένως αν δοθεί οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός y_0, υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός x_0 ώστε $\ln x_0 = y_0$. Επομένως, *για $y = 1$ υπάρχει ένας μόνο αριθμός που ο λογάριθμός του είναι ίσος με 1*. Αυτός ο αριθμός πρέπει να είναι το e, ο αριθμός που έχει φυσικό λογάριθμο ίσο με 1 (βλέπε και τα σχόλια στην §1.3). Ορίζουμε, λοιπόν, ***e να είναι ο αριθμός για τον οποίο είναι $\ln e = 1$, δηλαδή το εμβαδόν $E_{1,e} = 1$*** (Σχ. 5).

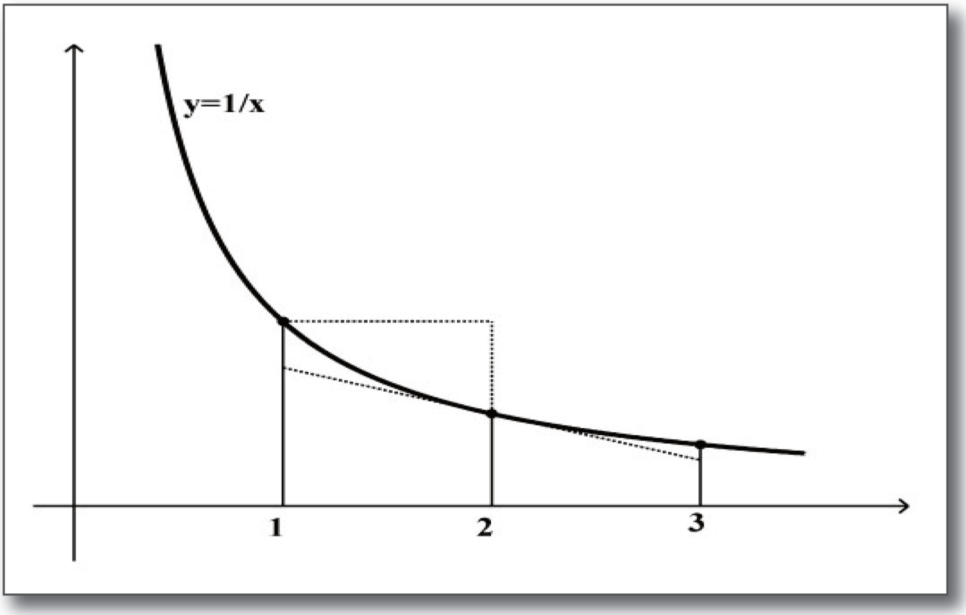
Σχήμα 5: Ο ορισμός του e



Μια αρχική εκτίμηση για το e μπορούμε να πάρουμε από το σχήμα (6). Παρατηρούμε ότι ln2 είναι μικρότερο από το εμβαδόν του τετραγώνου με βάση το διάστημα [1, 2] και ύψος 1, οπότε $\ln 2 < 1$. Επίσης ln3 είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τραπεζίου που ορίζεται από τον άξονα x′x, τις ευθείες $x = 1$, $x = 3$ και την εφαπτομένη στο σημείο με συντεταγμένες (2, 1/2), οπότε $\ln 3 > (3 - 1) \cdot 1/2 = 1$. Βρήκαμε έτσι ότι :

$$\mathbf{2 < e < 3}$$

Σχήμα 6: Μια αρχική εκτίμηση του e: $2 < e < 3$



Μια καλύτερη εκτίμηση για τον e θα πάρουμε αποδεικνύοντας τον επόμενο ισχυρισμό:

$$e = \lim_{\nu \to \infty}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$$

Στο όριο αυτό οδηγήθηκε ο Jacob Bernoulli (1683) όταν μελετούσε το πρόβλημα του ανατοκισμού. Ο ίδιος μπόρεσε να αποδείξει ότι το όριο έπρεπε να βρίσκεται μεταξύ 2 και 3. Δεν αναγνώρισε όμως κάποια σχέση της εργασίας του με τους λογαρίθμους.

Στο σχήμα (6) είναι $x = 1 + \frac{1}{\nu}$, όπου ν τυχαίος φυσικός αριθμός. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι μεταξύ των ορθογωνίων που έχουν βάση το διάστημα [1, x] και ύψη 1/x και 1 αντίστοιχα. Άρα

$$(x-1)\cdot\frac{1}{x} < \ln x < (x-1)\cdot 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu+1} < \ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{1}{\nu} \Leftrightarrow \frac{\nu}{\nu+1} < \ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} < 1.$$

Παίρνουμε τα όρια καθώς $\nu \to +\infty$ και βρίσκουμε $1 \le \ln\left(\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right) \le 1$, οπότε $\ln\left(\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}\right) = 1$.

Επειδή lne = 1 και η λογαριθμική συνάρτηση είναι 1 – 1, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e$$

Αν χρησιμοποιήσουμε ένα υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε με προσέγγιση πέντε δεκαδικών ψηφίων ότι e = 1,71828. Ο αριθμός e με προσέγγιση 10 δεκαδικών ψηφίων είναι e = 2,718281828 και ενδεχομένως η μορφή αυτή να οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Ο διδάσκων πρέπει να τονίζει στους μαθητές ότι ο αριθμός e είναι άρρητος (π.χ., Rudin, 1964).

Επισημαίνουμε ακόμη ότι πολλές βασικές προτάσεις που συναντάμε στην ύλη της Γ΄ Λυκείου δίνονται χωρίς απόδειξη με την αιτιολογία ότι είναι πέρα από τις δυνατότητες των μαθητών. Με τον ορισμό του λογαρίθμου που δόθηκε στην παρούσα εργασία οι αποδείξεις αυτές είναι απλές και κατανοητές (π.χ., Panagiotou, 2011). Η εργασία ολοκληρώνεται με τον ορισμό της εκθετικής συνάρτησης e^x, ως αντίστροφης της λογαριθμικής (idem).

3. Συμπεράσματα

Η αξία της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία έχει επισημανθεί εδώ και εκατό χρόνια στο διεθνή αλλά και στον Ελληνικό χώρο. Το ενδιαφέρον των καθηγητών για την ιστορία των μαθηματικών αυξάνεται όπως προκύπτει από τον αυξανόμενο αριθμό βιβλίων και άρθρων ιστορικού περιεχομένου, από τον αυξανόμενο αριθμό των ερευνητικών ομάδων που μελετούν την χρησιμοποίηση και την αξία της ιστορίας στην διδασκαλία των μαθηματικών (Fauvel & van Maanen 2000, Gulikers & Blom 2001)). Η θετική συμβολή της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία των μαθηματικών εντοπίζεται κυρίως στα επόμενα τρία επιχειρήματα:

- Η ιστορία των μαθηματικών βοηθάει τους μαθητές να κατανοήσουν καλύτερα τις μαθηματικές έννοιες και αποδείξεις δείχνοντας από πού προήλθαν και πως εξελίχθηκαν.
- Η ιστορία των μαθηματικών αναδεικνύει την ανθρώπινη πλευρά των μαθηματικών. Τα μαθηματικά είναι ανθρώπινη και δυναμική δραστηριότητα, η οποία επηρεάζεται από κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες και διαμορφώνονται σύμφωνα με τις υλικές και πνευματικές ανάγκες της εποχής.
- Η ιστορία των μαθηματικών αυξάνει το ενδιαφέρον των μαθητών για μάθηση και συμβάλλει στη διαμόρφωση μιας θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά και

Είναι όμως γεγονός ότι σχεδόν σε όλα τα σχολικά βιβλία δεν λαμβάνονται υπ' όψιν τα προηγούμενα επιχειρήματα. Ποτέ δεν παρουσιάζονται οι προσπάθειες και οι αποτυχίες που οδήγησαν στις έννοιες που περιγράφουν. Η παρουσίαση με την μορφή Ορισμός – Θεώρημα – Απόδειξη – Πόρισμα μπορεί να είναι κομψή και να κερδίζει χρόνο αλλά οι μαθητές μένουν με την απορία: Πως προέκυψε η ιδέα για τους ορισμούς αυτούς και αυτά τα θεωρήματα; Κατά τον Freudenthal (1973: 107):

> *"Οι βασικοί ορισμοί δεν πρέπει να εμφανίζονται στην αρχή της εξερεύνησης, επειδή για να ορίσεις κάτι πρέπει να ξέρεις τι είναι και σε τι χρησιμεύει".*

Τι μπορούμε να προσφέρουμε στους μαθητές; Να τους κάνουμε να δουν γιατί και πως προέκυψε αυτό που διδάσκονται σήμερα. Στην κατάκτηση της αφηρημένης έννοιας, η ιστορία του ανθρώπου συναντά αυτήν της ανθρωπότητας. Η εισαγωγή της ιστορίας στη διδασκαλία των μαθηματικών δεν είναι θέμα *περιεχομένου*. Είναι θέμα *στάσης* και πρόβλημα *εικόνας* της επιστήμης των μαθηματικών.

Είναι αναμφισβήτητο ότι ο αφηρημένος ορισμός της λογαριθμικής συνάρτησης σαν αντίστροφη της εκθετικής έχει κάποια πρακτική αξία μέσα στο ασφυκτικό αναλυτικό πρόγραμμα, αφού επιτρέπει την άμεση εξαγωγή των ιδιοτήτων των λογαρίθμων από τις ιδιότητες των δυνάμεων. Αυτό είναι αξιοκατάκριτος ωφελιμισμός που περιφρονεί κάθε αρχή διδασκαλίας και τον οποίο πρέπει αναμφίβολα να καταδικάσουμε. Με αυτό τον τρόπο δίνεται η εντύπωση ότι τα μαθηματικά έχουν πέσει έτοιμα από τον ουρανό και για να χρησιμοποιηθούν από γεννημένους ταχυδακτυλουργούς. Η διδασκαλία των λογαριθμικών εννοιών με βάση την ιστορική εξέλιξη παρουσιάζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Η μέθοδος της προσθαφαίρεσης μας δίνει μια πρώτης τάξεως ευκαιρία να τονίσουμε στους μαθητές την χρησιμότητα των τύπων της τριγωνομετρίας που μετατρέπουν γινόμενα σε αθροίσματα. Αυτό το παράδειγμα έχει πολύ μεγαλύτερη αξία από την στείρα χρήση των τύπων στην λύση ασκήσεων ρουτίνας διότι πραγματικά συμβάλει στην ευρύτερη κατανόηση της τριγωνομετρίας από τους μαθητές και αυξάνει την εκτίμησή τους προς αυτό το μάθημα. Επίσης η θεώρηση των τριγωνομετρικών αριθμών σαν μηκών, και όχι σαν λόγων, επιτρέπει την εξήγηση της προέλευσης των λέξεων ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και τέμνουσα.

- Συνδέει δημιουργικά την νέα ενότητα με την αμέσως προηγούμενη των προόδων αξιοποιώντας προηγούμενες γνώσεις των μαθητών.
- Δείχνει την αρχική χρησιμότητα των λογαρίθμων στην απλοποίηση των αριθμητικών υπολογισμών
- Δικαιολογεί την προέλευση του όρου λογάριθμος.
- Συνδέει την νέα ενότητα με τη μελέτη και γραφική παράσταση της συνάρτησης y = 1/x.
- Αξιοποιεί τις γνώσεις πάνω στις κωνικές τομές.
- Δικαιολογεί τι είναι ''φυσικό'' στους φυσικούς λογαρίθμους καθώς και τη σχέση τους με τον αριθμό e.
- Εξασφαλίζει μια μοναδική υποδομή, πάνω στην οποία μπορεί να στηριχτεί αργότερα η συστηματική διδασκαλία του ολοκληρωτικού λογισμού.
- Επιτρέπει την απόδειξη σημαντικών ιδιοτήτων της λογαριθμικής συνάρτησης, με βάση ένα γεωμετρικό μοντέλο.
- Επιτρέπει την κατανόηση της σημασίας του καλού συμβολισμού για την ανάπτυξη των μαθηματικών και τέλος
- Μπορεί να συνδυαστεί με πολλές ενδιαφέρουσες δραστηριότητες. Ανάλογα με το διαθέσιμο χρόνο, είναι ωφέλιμο αλλά και απολαυστικό το παίξιμο με το συμβολισμό του εξηκονταδικού συστήματος. Για τους μαθητές που έχουν κάποια εμπειρία με ασκήσεις στις οποίες πρέπει να βρεθεί ο νόμος, το πρότυπο, με τον οποίο σχηματίζεται μια ακολουθία αριθμών, υπάρχουν ενδιαφέροντα σχετικά θέματα στην πινακίδα Plimpton 322. Ωφέλιμη επίσης δραστηριότητα θα ήταν μια συνθετική εργασία για την εξέλιξη του συμβολισμού, ιδιαίτερα του εκθετικού, από την εποχή του Chuquet μέχρι τα μέσα $18^{ου}$ αιώνα.

O Felix Klein έχει προτείνει να χρησιμοποιείται η ισότητα:

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_c^{cx} \frac{dx}{x}$$

σαν βάση για τον ορισμό των λογαρίθμων. Η πρόταση του Gregory of St Vincent είναι ακριβώς η μετάφραση αυτής της ολοκληρωτικής σχέσης στο γνωστικό επίπεδο των μαθητών της Β' Λυκείου. Ο ίδιος προσθέτει (Klein 1908/1945: 156): ''*Εύχομαι κάποιος να κάνει πρακτική εφαρμογή αυτής της πρότασης στα σχολεία. Τις λεπτομέρειες* *υλοποίησης της πρότασης πρέπει να ρυθμίσει ο έμπειρος δάσκαλος''*. Τελειώνουμε με την ελπίδα πως το αναλυτικό πρόγραμμα θα επιτρέψει κάποια μέρα την εφαρμογή αυτής της παρουσίασης στα σχολεία.

Σημείωση

1. Εκτενέστερη μορφή του άρθρου έχει δημοσιευτεί με τα εξής στοιχεία: Panagiotou, E.N. [2011]: Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science & Education*, 20(1), 1-35.

Βιβλιογραφία

I. Ελληνική

Παναγιώτου, Ε. (2004) Στον δρόμο προς τους λογαρίθμους. *Το φ*, 53-62.

II. Μεταφράσεις

Eves, H. (1983) *Great moments in Mathematics – Before 1650*. Washington: Mathematical Association of America. Μετάφραση στα Ελληνικά από Μ. Κωνσταντινίδης & Ν. Λιλής, *Μεγάλες Στιγμές των Μαθηματικών – Πριν το 1650*. Αθήνα: Τροχαλία, 1989.

Van der Waerden, B.L. (1961) *Science Awakening*. New York: Holt, Rinehart and Winston. Μετάφραση στα Ελληνικά από Γ. Χριστιανίδης, *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*. Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.

III. Ξενόγλωσση

Ayoub, R. (1993) What is a Napierian Logarithm ? *American Mathematical Monthly*, 100(4), 351-364.

Burn, R.P. (2001) Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. *Historia Mathematica* 28, 1-17.

Cajori, F. (1913) History of the exponential and logarithmic concepts. *The American Mathematical Monthly*, Vol. XX.

Cajori, F. (1928) *A History of Mathematical Notations*. Chicago: Open Court.

Dhombres, J. (1993) Is one proof enough? Travels with a mathematician of the Baroque period. *Educational Studies in Mathematics* 24, 401-419.

Edwards, C.H. (1979) *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer – Verlag.

Euler, L. [1748/1990] : *Introduction to Analysis of the Infinite*, Books I and II (J.D. Blanton, trans.). New York: Springer-Verlag.

Euler, L. (1984) *Elements of algebra*, (John Hewlet, Trans.). New York: Springer.

Fauvel, J. & J. van Maanen (2000) *History in mathematics education, The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

Freudenthal, H. (1973) What groups mean in mathematics and what they should mean in mathematical education, in A.G. Howson (ed.): *Developments in Mathematical Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 101-114.

Gulikers, I. & K. Blom (2001) A historical angle, a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 223–258.

Huygens, C. (1651) *Theoremata de quadratura, hyperboles, elipsis et circuli*. Leiden. Reprinted in *Oeuvres completes de Christiaan Huygens*, vol. XI. The Hague: Société Hollandaise des Sciences, 1888-1950.

Klein, F. (1908) *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic – Algebra – Analysis* (translated from the German by E. R. Hedrick and C. A. Noble). New York: Dover Publications 1945.

Maor, E. (1994) *e – The History of a Number*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Mercator, N. (1668) Logarithmotechnica. London: Wm. Godbid/Moses Pitt.

Moulton, J.F. (Lord Moulton) (1915) The invention of logarithms and its genesis and growth. In C.G. Knott (Ed.), *Napier tercentenary memorial volume* (pp. 1–32). London: Longmans Green and Co.

Napier, J. (1614) *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Edinburgh. English translation by E. Wright, *A description of the admirable table of logarithms*. London: Samuel Wright, 1616.

Napier, J. (1619) *Mirifici logarithmorum canonis constructio*. Edinburgh. English translation by W. R. Macdonald, *The construction of the wonderful canon of logarithms*. Edinburgh: Blackwood, 1889.

Panagiotou, E.N. (2011) Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science & Education*, 20(1), 1-35.

Resnikoff, H.L. & R.O. Wells, Jr. (1984) *Mathematics in Civilization*. New York: Dover Publications.

Rudin, W. (1964) *Principles of Mathematical Analysis*. New York: McGraw – Hill Book Company (2nd ed).

Smith, D. E. (1915) The law of exponents in the works of the sixteenth century. In C.G.

Knott (Ed.), *Napier tercentenary memorial volume* (pp. 81–91). London: Longmans Green and Co.

Struik, D. J. (1968) *A Short History of Mathematics*. New York: Dover Publications, 3rd ed.

Van der Waerden, B. L. (1961) *Science awakening*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Whiteside, D. T. (1967–1976) *The mathematical papers of Isaac Newton* (Vol. I, II). Cambridge: Cambridge University Press.