ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ: ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΤΗΝ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΙΣΤΟΡΙΚΩΝ ΠΗΓΩΝ

Ματθαίος Αναστασιάδης
Κάτοχος Μεταπτυχιακού Διπλώματος, Π.Τ.Δ.Ε.
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε.
Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Abstract

In this research, we used one historical note and two primary sources, from Pappus' Collection and from Polybius' Histories, in the context of an instructional intervention focused on isoperimetric figures and area-perimeter relationships. The participants were 22 students from a sixth grade class. The material presented here is based on classroom observations, worksheets and interviews with the students. During the intervention, the students solved problems, which were based on the sources. Twenty-one of the 22 students considered the problem which was based on Pappus' text to be more interesting compared to the usual mathematical problems. Additionally, based on students' ratings of the texts, Pappus' text was the one that they liked most. Students' difficulties and the different ways through which the sources affected the development of students' Geometrical Work Spaces are also examined.

Keywords

History of Mathematics, primary sources, isoperimetric figures, area, Geometrical Work Spaces.

Περίληψη

Στην έρευνα αυτή χρησιμοποιήθηκαν ένα ιστορικό σημείωμα και δύο πρωτογενείς πηγές, από τη Συναγωγή του Πάππου και τις Ιστορίες του Πολύβιου, στο πλαίσιο μιας διδακτικής παρέμβασης για τα ισοπεριμετρικά σχήματα και τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού. Συμμετέχοντες ήταν 22 μαθητές από ένα τμήμα της ΣΤ' τάξης. Τα ευρήματα που παρουσιάζονται εδώ προέρχονται από παρατηρήσεις από τη διδασκαλία, από φύλλα εργασίας και από συνεντεύξεις με τους μαθητές. Στα μαθήματα, οι μαθητές έλυσαν προβλήματα βασισμένα στις πηγές. Οι 21 από τους 22 μαθητές έκριναν το πρόβλημα που βασιζόταν στο κείμενο του Πάππου ως πιο ενδιαφέρον σε σχέση με τα συνήθη μαθηματικά προβλήματα. Επιπλέον, βάσει της αξιολόγησης των τριών κειμένων από τους μαθητές, το κείμενο του Πάππου ήταν εκείνο που οι μαθητές άρεσαν περισσότερο. Στο άρθρο εξετάζονται, επίσης, οι δυσκολίες των μαθητών και οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους επηρέασαν οι πηγές την ανάπτυξη των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας των μαθητών.

Λέξεις-κλειδιά

Ιστορία των Μαθηματικών, πρωτογενείς πηγές, ισοπεριμετρικά σχήματα, εμβαδόν, Γεωμετρικοί Χώροι Εργασίας.

0. Εισαγωγή

Η έρευνα αυτή αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας, που συνδέει τη διδακτική αξιοποίηση ιστορικών πηγών με τη θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (Kuzniak, 2006), στο πλαίσιο μιας διδακτικής παρέμβασης με θέμα τα ισοπεριμετρικά σχήματα. Η παρούσα επιμέρους έρευνα επικεντρώνεται στον τρόπο με τον οποίο αξιοποιήθηκαν οι πηγές και εξετάζονται οι δυσκολίες των μαθητών και οι απόψεις τους τόσο για τη μάθησή τους, όσο και για τη διδακτική αξιοποίηση των συγκεκριμένων ιστορικών πηγών.

Στην εξέτασή των ισοπεριμετρικών σχημάτων, δηλαδή γεωμετρικών σχημάτων με ίσες περιμέτρους, εμπλέκονται οι έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού και οι μεταξύ τους σχέσεις. Σχετικά με αυτές τις έννοιες, αρκετές έρευνες έδειξαν ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν τους τύπους εις βάρος άλλων στρατηγικών, κάνουν λάθη στην εφαρμογή τους και δεν κατανοούν το αποτέλεσμα, συγχέουν την περίμετρο με το εμβαδόν, πιστεύουν αφενός ότι ίση περίμετρος συνεπάγεται ίσο εμβαδόν και αντιστρόφως και αφετέρου ότι η περίμετρος και το εμβαδόν εξαρτώνται άμεσα το ένα από το άλλο – δηλαδή ότι μικρότερη ή μεγαλύτερη περίμετρος συνεπάγεται το αντίστοιχο και για το εμβαδόν και αντιστρόφως – ενώ έχει αναφερθεί ότι οι παρανοήσεις για τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού συχνά επανέρχονται μετά τη διδασκαλία (Douady & Perrin-Glorian, 1989, Moreira-Baltar & Comiti, 1994, Vighi, 2010, Zacharos, 2006). Αυτές οι δυσκολίες, μάλιστα, ως προς τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού παρατηρούνται ακόμα και σε μεγαλύτερους μαθητές και σε ενήλικες (Kellogg, 2010, Woodward & Byrd, 1983).

1. Ιστορία των Μαθηματικών και Μαθηματική Εκπαίδευση

Για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών υπάρχουν, από τη μια πλευρά, θεωρητικές αντιρρήσεις και πρακτικές δυσκολίες: π.χ. υποστηρίζεται ότι οι μαθητές δεν αγαπούν την Ιστορία ή ότι η Ιστορία των Μαθηματικών θα μπορούσε να μπερδέψει τους μαθητές (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Πρακτικές δυσκολίες είναι η έλλειψη διδακτικού χρόνου και υλικού και η έλλειψη γνώσεων από πλευράς των εκπαιδευτικών. Επιπλέον, μια τέτοια αξιοποίηση είναι δύσκολο να αξιολογηθεί, οπότε δε θα κέρδιζε την προσοχή των μαθητών.

Από την άλλη, προβάλλεται ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να κινητοποιήσει τους μαθητές, συντελώντας ταυτόχρονα στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών περιεχομένων (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Επιπλέον, πληροφορούμενοι για δυσκολίες, σφάλματα και παρανοήσεις του παρελθόντος, οι μεν μαθητές μπορούν να έχουν οφέλη σε επίπεδο συναισθημάτων και στάσεων, ενώ οι εκπαιδευτικοί μπορούν να κάνουν εκτιμήσεις για πιθανές δυσκολίες των μαθητών και να εμπνευστούν προβλήματα και άλλο υλικό που θα μπορούσε να συμβάλει στην υπέρβαση αυτών των δυσκολιών. Παράλληλα, η Ιστορία των Μαθηματικών βοηθά στην αλλαγή των πεποιθήσεων για τα Μαθηματικά, τονίζει το ρόλο των ανθρώπων και των πολιτισμών στην εξέλιξή τους και διδάσκει ότι οι μαθηματικές έννοιες αναπτύχθηκαν ως εργαλεία για την οργάνωση του κόσμου. Τέλος, μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών συνδέονται τα Μαθηματικά με άλλα γνωστικά αντικείμενα.

Αναφορικά με τη σχέση των δυσκολιών των μαθητών με τις δυσκολίες που εμφανίζονται στην Ιστορία των Μαθηματικών, υπάρχουν διαφορετικές προσεγγίσεις. Ο Brousseau (2002), με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου, τόνισε το ρόλο μιας δεδομένης γνώσης, που με τα χαρακτηριστικά της συνεπάγεται συγκεκριμένα πλεονεκτήματα, αλλά οδηγεί εκ των πραγμάτων και σε συγκεκριμένα σφάλματα. Αντίθετα, οι Furinghetti και Radford (2008) τόνισαν το ρόλο του πολιτισμού και υποστήριξαν ότι μέσω του σχολείου προετοιμάζεται το «ξεπακετάρισμα» μιας συμπυκνωμένης παράδοσης αιώνων. Τέλος, στο πλαίσιο της εννοιολογικής αλλαγής, θεωρείται ότι οι ιδέες των μαθητών μπορεί να προέρχονται από την αλληλεπίδρασή τους με το φυσικό περιβάλλον και τα εργαλεία του πολιτισμού (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006). Συνεπώς, τυχόν ομοιότητες θα μπορούσαν να συνδέονται π.χ. με την αντίληψη που παρέχουν οι αισθήσεις ή με τη χρήση παρόμοιων εργαλείων.

Σχετικά με τους τρόπους αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών, ο συνηθέστερος είναι η χρήση ιστορικών σημειωμάτων, δηλαδή κειμένων που κατασκευάζονται για διδακτικούς σκοπούς και μπορεί να περιλαμβάνουν ονόματα, χρονολογίες, βιογραφίες, ανέκδοτα ή και αφηγήσεις (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000). Άλλοι τρόποι είναι τα φύλλα εργασίας, τα ιστορικά προβλήματα και οι πρωτογενείς και δευτερογενείς πηγές. Οι παραπάνω τρόποι μπορούν να συνδυαστούν για το σχεδιασμό διδακτικών-μαθησιακών σειρών (πακέτων) και projects, σύντομων ή εκτενέστερων και με μικρότερη ή μεγαλύτερη συνάφεια με το ισχύον πρόγραμμα σπουδών.

Η χρήση πρωτογενών πηγών είναι ο πιο απαιτητικός και χρονοβόρος τρόπος, ενώ συχνά είναι δύσκολη και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων (Jahnke et al., 2000). Ο εκπαιδευτικός ενδέχεται να πρέπει να μεταφράσει ή να τροποποιήσει το κείμενο, αλλά συστήνεται να μην απομακρύνεται πολύ από το αυθεντικό κείμενο. Η εισαγωγή της πηγής μπορεί να γίνει άμεσα, χωρίς προηγούμενη προετοιμασία, ή έμμεσα, π.χ. μετά από επίλυση προβλημάτων. Γενικότερα, για την αξιοποίηση των πρωτογενών πηγών δεν υπάρχει μόνο μία διδακτική στρατηγική συνεπώς, θα πρέπει να επιλέγεται η καταλληλότερη.

2. Οι Σχέσεις Περιμέτρου-Εμβαδού στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Αρκετές μαρτυρίες δείχνουν ότι οι σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού προκαλούσαν δυσκολίες και κατά το παρελθόν. Για παράδειγμα, ο Πολύβιος από τη Μεγαλόπολη (2ος αι. π.Χ.), στο 9ο βιβλίο των *Ιστοριών* του, υποστήριξε ότι οι στρατηγοί θα πρέπει να έχουν και βασικές γνώσεις Αστρονομίας και Γεωμετρίας και για να το τεκμηριώσει ανέφερε και τα εξής: «Οι περισσότεροι άνθρωποι υπολογίζουν τα μεγέθη των προαναφερομένων [πόλεων και στρατοπέδων] μόνο από την περίμετρο. (....) Ο λόγος για αυτό είναι ότι δε θυμούμαστε τα μαθήματα Γεωμετρίας που είχαμε διδαχτεί στα παιδικά μας χρόνια» (*Hist*. 9.26a.1-4, Büttner-Wobst ed.).[1] Μάλιστα, έδωσε δύο παραδείγματα: το πρώτο αφορά τη σύγκριση μεταξύ Σπάρτης και Μεγαλόπολης, ενώ το δεύτερο αφορά μια υποθετική πόλη ή στρατόπεδο, που ενώ έχει περίμετρο 40 σταδίων, είναι διπλάσια από μια άλλη με περίμετρο 100 σταδίων.

Σύμφωνα με τον Walbank (1967), «τα μεγέθη» είναι το εμβαδόν της κάθε πόλης. Επιπλέον, το πρώτο παράδειγμα έχει ιδιαίτερο ιστορικό ενδιαφέρον, καθώς η σύγκριση φαίνεται να μην επιβεβαιώνεται για το εμβαδόν, τουλάχιστον με τα υπάρχοντα αρχαιολογικά ευρήματα. Αντίθετα, το δεύτερο παράδειγμα αναφέρεται σε ακραίες περιπτώσεις και έχει περισσότερο μαθηματικό ενδιαφέρον.

Η αναφορά του Πολύβιου στα «μαθήματα Γεωμετρίας» δείχνει ότι οι σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού είχαν ήδη απασχολήσει τους μαθηματικούς. Ήδη, ο Ευκλείδης στα *Στοιχεία* είχε αποδείξει ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται στην ίδια βάση ή σε ίσες βάσεις και μεταξύ των ίδιων παραλλήλων, είναι ίσα το ένα με το άλλο και, ακολούθως, απέδειξε το ίδιο και για τα τρίγωνα (1.35-38). Τα θεωρήματα αυτά συνεπάγονται ότι η επιφάνεια του παραλληλογράμμου και του τριγώνου δεν εξαρτάται από την περίμετρο.

Με την ισοπεριμετρία ασχολήθηκε και ο Ζηνόδωρος (πιθανόν 2ος αι. π.Χ.). Η πραγματεία του για τα ισοπεριμετρικά σχήματα δε σώζεται όμως, βάσει όσων παρέθεσε αργότερα ο Θέων, ο Ζηνόδωρος απέδειξε ως προς τα επίπεδα σχήματα ότι από όλα τα κανονικά πολύγωνα με ίση περίμετρο, το μεγαλύτερο είναι αυτό με τις περισσότερες γωνίες και ότι αν ένας κύκλος έχει ίση περίμετρο με ένα κανονικό πολύγωνο, τότε ο κύκλος είναι μεγαλύτερος (Cooke, 2005, Heath, 1921). Επιπλέον, έδειξε ότι από όλα τα ισοπεριμετρικά πολύγωνα με ίσο αριθμό γωνιών, το μεγαλύτερο είναι το ισόπλευρο και ισογώνιο, αλλά για την απόδειξη βασίστηκε μερικώς σε ένα λήμμα που δεν είχε αποδείξει με γενικό τρόπο.

Η ισοπεριμετρία αποτελεί και το βασικό θέμα του Ε′ βιβλίου της *Συναγωγής* ή *Μαθηματικής Συλλογής* του Πάππου (4ος αι. μ.Χ.). Το Α′ μέρος του βιβλίου αφορά τα επίπεδα σχήματα και ξεκινά με μια εισαγωγή, που χαρακτηρίζεται από υψηλή λογοτεχνική αξία (Cooke, 2005, Heath, 1921) και κεντρίζει το ενδιαφέρον. Το θέμα της είναι το εξαγωνικό σχήμα των κελιών από τις κηρήθρες. Η τελεολογική θεώρηση είναι εδώ ευδιάκριτη, καθώς αποδίδεται σκοπιμότητα στην επιλογή του σχήματος από τις μέλισσες. Με αυτό ως αφορμή, ο Πάππος διατυπώνει στο κλείσιμο της εισαγωγής ένα μαθηματικό πρόβλημα:

> (….) Οι μέλισσες, λοιπόν, γνωρίζουν μόνο αυτό που είναι χρήσιμο σε αυτές. Δηλαδή, ότι το εξάγωνο είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο και το τρίγωνο και μπορεί να χωρέσει περισσότερο μέλι, με την ίδια δαπάνη υλικών για την κατασκευή καθενός. Εμείς, ωστόσο, ισχυριζόμενοι ότι κατέχουμε μεγαλύτερο μερίδιο σοφίας από τις μέλισσες, θα ερευνήσουμε κάτι ευρύτερο. Δηλαδή, ότι από όλα τα ισόπλευρα και ισογώνια επίπεδα σχήματα που έχουν ίση περίμετρο, μεγαλύτερο είναι πάντοτε αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμό γωνιών. Και το μεγαλύτερο από όλα είναι ο κύκλος, εφόσον έχει ίση περίμετρο με αυτά. (*Συναγωγή* Ε′.3, Hultsch ed.)

Κατά την Cuomo (2000), το Ε′ βιβλίο εντασσόταν πιθανότατα σε ένα πλαίσιο ανταγωνισμών για την οικειοποίηση της παράδοσης, την απόκτηση φήμης και την προσέλκυση μαθητών. Στις μέλισσες αναφέρονταν συχνά και οι φιλόσοφοι για τον Πάππο, η διαφορά μεταξύ μελισσών και ανθρώπων είναι ότι οι μέλισσες διαθέτουν γνώση περιορισμένη, χρήσιμη και ενστικτώδη, ενώ οι άνθρωποι έχουν την ικανότητα και το ενδιαφέρον για την απόδειξη. Μέσα από την εισαγωγή, λοιπόν, αναδεικνύεται η ανάγκη για την απόδειξη των ισοπεριμετρικών θεωρημάτων στα επίπεδα σχήματα, στην οποία προβαίνει ο Πάππος ακολούθως στο πλαίσιο της ευκλείδειας παράδοσης. Στην αποδεικτική πορεία, αν και απουσιάζει οποιαδήποτε αναφορά στον Ζηνόδωρο, φαίνεται ότι ο Πάππος ακολούθησε το έργο εκείνου, ιδίως στα επίπεδα σχήματα, προσθέτοντας όμως και δικές του προτάσεις και αποδείξεις (Heath, 1921).

Η εισαγωγή του Πάππου για τις μέλισσες σχετίζεται και με το πρόβλημα που έμεινε αργότερα γνωστό ως υπόθεση της κηρήθρας. Βάσει της εικασίας, που αποδείχθηκε πληρέστερα από τον Hales (2001), η κάλυψη του χώρου με κανονικά εξάγωνα, όπως συμβαίνει στις κηρήθρες, είναι αυτή που επιτυγχάνει την ελάχιστη περίμετρο, για οποιοδήποτε διαμερισμό του επιπέδου σε περιοχές ίσης επιφάνειας.

3. Θεωρητικό Πλαίσιο για το Σχεδιασμό της Διδασκαλίας

Όσον αφορά το εμβαδόν, έχει τονιστεί η ανάγκη οι μαθητές να κατανοούν ότι αποτελεί ιδιότητα και προτείνονται οι μετρήσεις του εμβαδού με δισδιάστατες μονάδες, οι συγκρίσεις σχημάτων, η τοποθέτηση ενός σχήματος πάνω στο άλλο και η αποκοπή-επικόλληση των περίσσιων τμημάτων και, τέλος, η εξέταση των σχέσεων περιμέτρου-εμβαδού (Douady & Perrin-Glorian, 1989, Nunes et al., 1993, Van de Walle & Lovin, 2006). Μάλιστα, σε αμερικανικά προγράμματα της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, όπως αυτό του North Carolina Department of Public Instruction (2012) και του Georgia Department of Education (2014), οι σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού διερευνώνται από την 3η κιόλας τάξη.

Στην παρούσα έρευνα οι έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού εξετάστηκαν από τη σκοπιά της Γεωμετρίας, για αυτό και χρησιμοποιήθηκε η θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (Kuzniak, 2006, 2012). Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας (ΓΧΕ) είναι ο χώρος που έχει οργανωθεί με τρόπο που να καθίσταται εφικτή για το χρήστη του χώρου – μαθηματικό, φοιτητή ή μαθητή – η επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Συνεπώς, τα προβλήματα αποτελούν το λόγο ύπαρξης των ΓΧΕ. Διακρίνονται τρία επίπεδα: ο ΓΧΕ αναφοράς, που καθορίζεται από μια κοινότητα μαθηματικών ή στην εκπαίδευση από το πρόγραμμα σπουδών, ο κατάλληλος ΓΧΕ, που σχεδιάζεται από τον διδάσκοντα για μια δεδομένη τάξη, και ο προσωπικός ΓΧΕ, που αναπτύσσεται στην πράξη από τον τελικό χρήστη, εν προκειμένω τον κάθε μαθητή. Διακρίνονται, επίσης, διαφορετικά επιστημολογικά παραδείγματα. Εδώ, μας ενδιαφέρει η Γεωμετρία 1 (GI) – όπου κυριαρχεί ο πειραματισμός και επιτρέπονται οι πρακτικές αποδείξεις, οι μετρήσεις, η χρήση αριθμών και οι κατά προσέγγιση απαντήσεις – και η Γεωμετρία 2 (GII), με αρχέτυπο την κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Ο ΓΧΕ περιλαμβάνει τρία συστατικά: α) το χώρο με τα σχήματα, β) τα τεχνουργήματα-εργαλεία και γ) το θεωρητικό σύστημα αναφοράς, με τους ορισμούς και τις ιδιότητες. Σε ένα δεύτερο, γνωστικό επίπεδο εντάσσονται τρία είδη διαδικασιών: η οπτικοποίηση, η κατασκευή και η απόδειξη. Στην οπτικοποίηση περιλαμβάνεται και η ανασύνθεση των σχημάτων με υλικό τρόπο ή με ανα-οργανωτικές γραμμές ή μόνο με το βλέμμα (Duval, 2005).

Όσον αφορά τις εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών, ο Brousseau (2002) έχει υποστηρίξει ότι η υπέρβαση ενός εμποδίου απαιτεί την εμπλοκή των μαθητών στην επίλυση επιλεγμένων προβλημάτων, μέσω των οποίων οι μαθητές θα διαπιστώσουν την αναποτελεσματικότητα μιας γνώσης ή αντίληψης. Σημείωσε, όμως, ότι τα προβλήματα πρέπει να επιλέγονται με τρόπο που οι μαθητές να κινητοποιούνται και, ακολούθως, να δρουν, να συζητούν και να σκέφτονται, προκειμένου να τα επιλύσουν.

Επιπλέον, τα λεγόμενα εποικοδομητικά μοντέλα διδασκαλίας έχουν τονίσει την ανάγκη η διδασκαλία να κλείνει με μια μεταγνωστική φάση, στην οποία «ο δάσκαλος ζητά από τους μαθητές να του περιγράψουν την παλιά και τη νέα τους γνώση και να αντιληφθούν τις διαφορές της» (Καριώτογλου, 2006: 36). Μια πρακτική που μπορεί να βοηθήσει στην αλλαγή των ιδεών των μαθητών είναι και η χρήση κειμένων αντιπαράθεσης (refutation texts) (Tippett, 2010). Σε αντίθεση με τα παραδοσιακά κείμενα, που απλώς εκθέτουν και επεξηγούν την ισχύουσα επιστημονική άποψη, τα κείμενα αντιπαράθεσης παραθέτουν επιπλέον και κάποια διαδεδομένη εναλλακτική ιδέα, αναφέροντας ότι είναι εσφαλμένη. Για την αξιοποίηση αυτών των κειμένων προτείνεται ο συνδυασμός τους με συζητήσεις και άλλες δραστηριότητες, καθώς η αλλαγή των απόψεων είναι δύσκολη υπόθεση και κανένα κείμενο από μόνο του δεν επαρκεί για να επιτευχθεί αυτό με όλους τους μαθητές.

Αναφέρθηκε παραπάνω η αξία της κινητοποίησης των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων και επισημάνθηκε ότι η κινητοποίηση αποτελεί ένα συνήθη στόχο κατά την αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Εξάλλου, από τη σκοπιά της ψυχολογίας των κινήτρων, οι Schunk et al. (2010) σύστησαν μεταξύ άλλων να χρησιμοποιείται υλικό από πρωτότυπες πηγές. Όσον αφορά τα χαρακτηριστικά των κειμένων που προκαλούν το ενδιαφέρον, οι Schraw et al. (1995) επεσήμαναν το ρόλο της ευκολίας κατανόησης και της ζωντάνιας και παραστατικότητας του κειμένου. Επιπλέον, έχει βρεθεί πως μαθητές και εκπαιδευτικοί έκριναν ότι η μεγαλόφωνη ανάγνωση ενός κειμένου από τον εκπαιδευτικό το κάνει πιο ενδιαφέρον και ενισχύει την κατανόηση (Ariail & Albright, 2006, Ivey & Broaddus, 2001). Άλλοι παράγοντες που έχει επισημανθεί ότι μπορούν να προκαλέσουν το ενδιαφέρον είναι οι νεωτερισμοί, η ομαδική εργασία, οι πρακτικές δραστηριότητες, ορισμένα θέματα που σχετίζονται με τη φύση, η απόδοση νοήματος στη δραστηριότητα και η ισορροπία ανάμεσα στο βαθμό πρόκλησης και στο επίπεδο των γνώσεων και ικανοτήτων ενός ατόμου (Bergin, 1999, Mitchell, 1993, Schunk et al., 2010).

4. Μεθοδολογία Έρευνας

Συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν ένα τμήμα της ΣΤ′ τάξης με 22 μαθητές από εργατική περιοχή της Θεσσαλονίκης. Τα δεδομένα που παρουσιάζονται προέρχονται από φύλλα εργασίας, από παρατηρήσεις από τη διδασκαλία και από ατομικές συνεντεύξεις με τους μαθητές. Οι διδασκαλίες πραγματοποιήθηκαν από τον έναν ερευνητή στην κανονική τάξη των μαθητών, ενώ η εκπαιδευτικός της τάξης ήταν παρούσα ως παρατηρήτρια. Εξαίρεση αποτελεί η επίλυση του κύριου μαθηματικού προβλήματος, όπου προτιμήθηκε να μην εργαστούν οι ομάδες συγχρόνως, αλλά διαδοχικά, για μία διδακτική ώρα η καθεμιά, σε άλλη αίθουσα του σχολείου. Αυτό έγινε για να καταστεί εφικτή η παρατήρηση του τρόπου εργασίας και των δυσκολιών της κάθε ομάδας και των μελών της. Η διάρκεια της παρέμβασης ήταν έξι διδακτικές ώρες στην κανονική τάξη και μία διδακτική ώρα για κάθε ομάδα σε άλλη αίθουσα.

4.1. Σχεδιασμός του κατάλληλου ΓΧΕ

Η παρέμβαση προτιμήθηκε να υλοποιηθεί προτού οι μαθητές διδαχθούν την Ενότητα του βιβλίου που αφορά τη Γεωμετρία, ώστε να μην έχουν διδαχθεί τον τύπο εμβαδού του γενικού τριγώνου και του τραπεζίου και για να μην επηρεαστούν οι μαθητές από την έμφαση που δίνει το βιβλίο στους τύπους.

Σχετικά με την Ιστορία των Μαθηματικών, επιλέχτηκαν δύο πρωτογενείς πηγές: η πρώτη ήταν η εισαγωγή στο Α′ μέρος του Ε′ βιβλίου της *Συναγωγής* του Πάππου (Ε′.1-3) και η δεύτερη ήταν από τις *Ιστορίες* του Πολύβιου (9.26a.1-6). Επιπλέον, επιλέχτηκε από το βιβλίο της ΣΤ′ τάξης ένα ιστορικό σημείωμα με τον τίτλο «Γεωμετρία» (Κασσώτη κ.ά., 2006: 136), ώστε να συνδέσουν οι μαθητές το περιεχόμενο της παρέμβασης με ό,τι διδάσκεται στη σχετική Ενότητα του βιβλίου.

Δεδομένου ότι οι μαθητές στο Δημοτικό δε γνωρίζουν αρχαία ελληνικά, επιλέχτηκε να παρουσιαστούν οι πηγές μεταφρασμένες. Κατά τη μετάφραση, χρησιμοποιήθηκαν λέξεις και φράσεις κατά το δυνατόν κοντά στα πρωτότυπα κείμενα, ενώ σε άλλες περιπτώσεις προτιμήθηκαν περίοδοι λόγου λιγότερο μακροσκελείς, ώστε να είναι τα μεταφρασμένα κείμενα κατάλληλα για τους μαθητές, χωρίς να απομακρύνονται από τα αυθεντικά (Jahnke et al., 2000). Ακόμη, βάσει των στόχων της παρέμβασης, δε συμπεριελήφθησαν από το κείμενο του Πάππου η προσφώνηση «κράτιστε Μεγεθίον» (*Συναγωγή* Ε′.1), η αναφορά στον κύκλο (Ε′.3) και η λεπτομερής αιτιολόγηση της θέσης ότι, από τα κανονικά σχήματα, υπάρχουν μόνο τρία που καλύπτουν εντελώς μια επιφάνεια χωρίς επικαλύψεις και κενά (Ε′.2). (Τα μεταφρασμένα κείμενα που παρουσιάσθηκαν στους μαθητές βρίσκονται σε **Παράρτημα** στο τέλος του άρθρου.)

Το κείμενο του Πάππου, ως ιστορική πηγή, δεν εισήχθη άμεσα, αφού προηγούνταν ως εισαγωγή η αξιοποίηση του ιστορικού σημειώματος. Αναλυτικότερα, ο σχεδιασμός προέβλεπε να αναγνωστεί το ιστορικό σημείωμα, να σχολιαστεί σύντομα και να επεκταθεί με βασικές πληροφορίες για τον Πάππο και την εποχή του. Για το κείμενο του Πάππου, προτιμήθηκε μια διαφορετική προσέγγιση: διατύπωση ερωτήσεων από τον εκπαιδευτικό, μεγαλόφωνη ανάγνωση του κειμένου από τον εκπαιδευτικό χωρίς οι μαθητές να έχουν το κείμενο μπροστά τους και απάντηση των ερωτήσεων-συζήτηση. Ακολούθως, υπήρχε η πρόβλεψη οι μαθητές να πάρουν το κείμενο σε φωτοτυπία και να υπογραμμίσουν λέξεις και φράσεις σχετικές με τα Μαθηματικά. Ο στόχος ήταν να ενεργοποιηθούν έτσι οι γεωμετρικές ιδιότητες που χρειάζονταν για τη διαμόρφωση του ΓΧΕ: τι είναι το πολύγωνο και τι κανονικό πολύγωνο, ποια είναι τα κανονικά σχήματα που καλύπτουν πλήρως την επιφάνεια χωρίς επικαλύψεις ή κενά, τι είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό εξάγωνο, τι είναι περίμετρος και εμβαδόν, ποια σχήματα λέγονται ισοπεριμετρικά και πώς σχετίζεται με τα Μαθηματικά η απόδειξη.

Ακολούθως, σχεδιάστηκε να τεθεί ένα πρόβλημα, βάσει του οποίου οι μαθητές έπρεπε να συγκρίνουν τα εμβαδά ισοπεριμετρικών σχημάτων, ώστε να διαπιστώσουν αν όντως ισχύει ο ισχυρισμός του Πάππου ότι το κελί σε σχήμα κανονικού εξαγώνου χωράει περισσότερο μέλι σε σχέση με άλλα σχήματα που καλύπτουν εντελώς το χώρο.

Στη φάση πειραματισμού προβλεπόταν η επίλυση του προβλήματος από τους μαθητές κατά ομάδες, με διαφορετικές μεθόδους:

1η: Άμεση σύγκριση με τοποθέτηση του ενός σχήματος πάνω στο άλλο και αποκοπή-επικόλληση των περίσσιων τμημάτων.

2η: Έμμεση σύγκριση με πλακόστρωση ίσων επιφανειών (αντίστροφη αναλογία: μεγαλύτερο το σχήμα που επαναλαμβάνεται λιγότερες φορές).

3η: Μέτρηση με ημιδιαφανές τετραγωνικό πλέγμα.

4η: Υπολογισμός με τύπους.

Τα γεωμετρικά σχήματα ήταν κανονικά πολύγωνα με τρεις, τέσσερις και έξι γωνίες, αλλά και μη κανονικά (μακρόστενο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο). Τα σχήματα αυτά κρίθηκε σκόπιμο να δοθούν κομμένα σε χαρτόνι, ώστε να διευκολυνθούν οι ανασυνθέσεις, ενώ δεν υπήρχαν αριθμητικές ενδείξεις για τα μήκη των πλευρών. Έτσι, οι μαθητές έπρεπε να μετρήσουν τις πλευρές και να υπολογίσουν την περίμετρο του κάθε σχήματος και έπειτα να εφαρμόσουν την προτεινόμενη μέθοδο για τις συγκρίσεις των εμβαδών (GI). Τα εργαλεία που κρίθηκε σκόπιμο, κατά περίπτωση ανάλογα με τη μέθοδο, να βρίσκονται διαθέσιμα ήταν: βαθμονομημένος γνώμονας, ψαλίδι, κόλλα, κολλητική ταινία, διαφάνεια με φωτοτυπημένο τετραγωνικό πλέγμα, μαρκαδόρος, μολύβι, σβήστρα και αριθμομηχανή. Επιπλέον, σχεδιάστηκε για κάθε ομάδα ένα φύλλο εργασίας, με στόχο να παρέχει μέσω ερωτήσεων κάποια βήματα για την επίλυση του προβλήματος και να βοηθάει τους μαθητές αργότερα στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων στην τάξη.

Μετά την επισημοποίηση των νέων ιδιοτήτων, ακολουθούσε η αξιοποίηση του κειμένου του Πολύβιου. Εδώ, υπήρξε η πρόβλεψη να γίνει σχετική συζήτηση, ενώ σχεδιάστηκαν και δύο δραστηριότητες. Η πρώτη ζητούσε να βρεθεί τι σχήμα και διαστάσεις θα μπορούσαν να έχουν δύο πόλεις, που η μία να έχει περίμετρο 40 σταδίων, αλλά εμβαδόν διπλάσιο από την άλλη με περίμετρο 100 σταδίων. Η δεύτερη ήταν η δραστηριότητα «Γειτονιές της Θεσσαλονίκης». Για αυτήν, επιλέχτηκαν οκτώ ισοπεριμετρικά σχήματα, που συμβόλιζαν γειτονιές.

Εικόνα 1: Τα οκτώ ισοπεριμετρικά σχήματα της δραστηριότητας «Γειτονιές της Θεσσαλονίκης»

Ειδικότερα, υπήρξε η πρόβλεψη να είναι τα σχήματα αποτυπωμένα σε χαρτί, να αναγράφεται το μήκος κάθε πλευράς σε μέτρα και να δοθούν δύο σχήματα σε κάθε δυάδα μαθητών (εταιρική εργασία). Από τους μαθητές ζητούνταν να υπολογίσουν τις περιμέτρους και να συμπεράνουν, χωρίς υπολογισμό, αν η μια περιοχή είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη από την άλλη και γιατί.

Στο πρώτο ερώτημα, οι μαθητές θα έπρεπε απλώς να προσθέσουν τα μήκη και να διαπιστώσουν ότι τα σχήματα ήταν ισοπεριμετρικά. Στο δεύτερο ερώτημα, χρειαζόταν να εργαστούν θεωρητικά (GII), εφαρμόζοντας τα επισημοποιημένα συμπεράσματα από το πρόβλημα με τις κηρήθρες. Ακολούθως, υπήρξε ο σχεδιασμός κάθε δυάδα μαθητών να ανακοινώσει την απάντηση και να ελέγξει την ορθότητά της με ηλεκτρονικές μετρήσεις (GI), μέσω σχετικής εφαρμογής και ψηφιακού προβολέα. Η εφαρμογή σχεδιάστηκε με το Geogebra και τα οκτώ σχήματα είχαν ως φόντο το χάρτη της Θεσσαλονίκης και κλίμακα ίδια με αυτόν. Τέλος, υπήρξε η πρόβλεψη να τοποθετήσουν οι μαθητές όλα τα σχήματα στον πίνακα, από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, διαπιστώνοντας στην πράξη ότι οκτώ διαφορετικά σχήματα είχαν ίση περίμετρο, αλλά διαφορετικά εμβαδά, ότι το μεγαλύτερο ήταν το κανονικό σχήμα με τις περισσότερες γωνίες και ότι το μικρότερο ήταν το πιο μακρόστενο σχήμα.

5. Αποτελέσματα

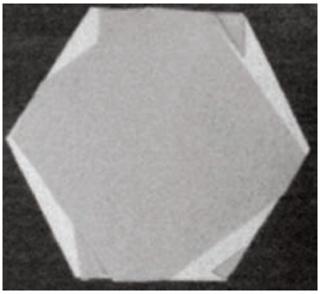
5.1. Η υλοποίηση του κατάλληλου ΓΧΕ και οι δυσκολίες των μαθητών

Από την επεξεργασία του κειμένου του Πάππου δύο αλληλένδετα στοιχεία είναι αξιοσημείωτα. Καταρχάς, όταν οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν στο κείμενο λέξεις και φράσεις σχετικές με τα Μαθηματικά, κανείς δεν ανέφερε τη λέξη «απόδειξη». Επιπλέον, μετά την επεξεργασία του κειμένου, αρκετοί έδειξαν πεπεισμένοι ότι ο Πάππος είχε δίκιο και συμφώνησαν a priori πως το εξάγωνο θα είναι μεγαλύτερο.

Στο πρόβλημα με τις κηρήθρες, όλες οι ομάδες κατέταξαν σωστά τα σχήματα βάσει εμβαδού. Παρακάτω, αναφέρονται οι κύριες δυσκολίες που παρατηρήθηκαν κατά τη διαδικασία επίλυσης.

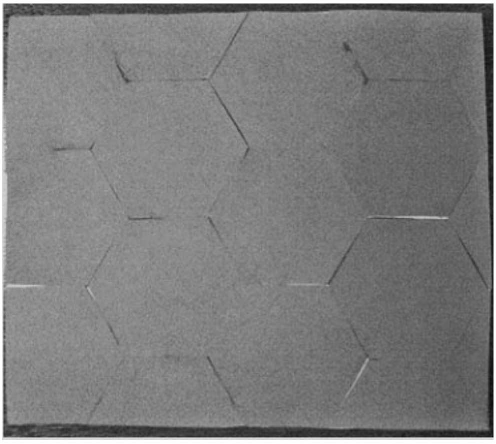
- Αποκοπή-επικόλληση: η σχετικά δυσκολότερη σύγκριση ήταν μεταξύ εξαγώνου-τετραγώνου Γενικά, όμως, αυτή η μέθοδος ήταν η ευκολότερη.

Εικόνα 2: Αποκοπή-επικόλληση. Σύγκριση εξαγώνου-τετραγώνου



- Πλακόστρωση: χρειάστηκε να επιστρατευθεί το υποθετικό παράδειγμα δύο ίδιων δωματίων με διαφορετικά πλακάκια, ώστε να γίνει κατανοητό το σκεπτικό της μεθόδου. Στην καταμέτρηση των σχημάτων, μεγαλύτερη δυσκολία παρατηρήθηκε στα εξάγωνα, καθώς απαιτούνταν η σύνθεση με το βλέμμα επιμέρους τμημάτων διαφορετικών από το μισό.

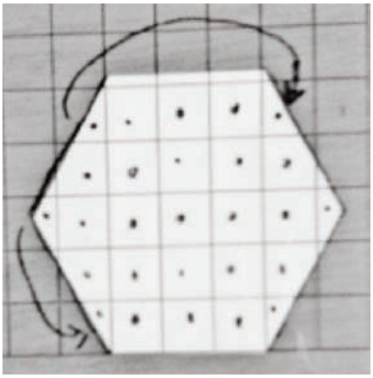
Εικόνα 3: Πλακόστρωση με κανονικό εξάγωνο



- Καταμέτρηση τετραγωνιδίων: οι μαθητές αρχικά δε θυμούνταν ότι σε μικρότερες τάξεις για να βρουν το εμβαδόν μετρούσαν τετραγωνάκια, που είτε υπήρχαν στο σχήμα είτε τα σχεδίαζαν οι ίδιοι. Επιπλέον, χρειάστηκε να βρουν ένα λειτουργικό τρόπο χρήσης του ημιδιαφανούς πλέγματος, που ήταν νέο για αυτούς εργαλείο.

Το δυσκολότερο σημείο ήταν η καταμέτρηση των επιμέρους τετραγωνιδίων του εξαγώνου.

Εικόνα 4: Καταμέτρηση τετραγωνιδίων κανονικού εξαγώνου



Μια πιο εξελιγμένη λύση δόθηκε αργότερα με την ανασύνθεση ολόκληρου του εξαγώνου σε ορθογώνια.

- Υπολογισμός: χρειαζόταν να ανασυντεθούν κάποια σχήματα, ώστε να προκύψουν σχήματα με διδαγμένο τύπο.

Εικόνα 5: Ανασύνθεση ισόπλευρου τριγώνου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (4η μέθοδος)

Δυσκολίες υπήρξαν στην επιλογή του κατάλληλου τύπου, στην ανασύνθεση του εξαγώνου και στον υπολογισμό που έπρεπε να γίνει όταν ένα σχήμα αναλυόταν μέσω δίπλωσης, χωρίς να κοπεί.

Πέραν τούτων, κάποιοι μαθητές από διαφορετικές ομάδες έδειξαν σύγχυση μεταξύ περιμέτρου-εμβαδού. Εμπόδιο για τις ομάδες ήταν και το σύνηθες διδακτικό συμβόλαιο, καθώς στις μεγαλύτερες τάξεις του Δημοτικού οι πρακτικές δραστηριότητες με σχήματα υλικής φύσεως μάλλον απουσιάζουν στην πράξη. Έτσι, ορισμένοι ένιωθαν την ανάγκη να ζητούν άδεια για τη χρήση του ψαλιδιού, τη δίπλωση και την κοπή των σχημάτων, παρότι είχε επισημανθεί πως μπορούσαν να εργαστούν με τα σχήματα όπως ήθελαν, χρησιμοποιώντας όποιο εργαλείο από τα διαθέσιμα ήθελαν.

Όσον αφορά το κείμενο του Πολύβιου, στη συζήτηση που ακολούθησε διατυπώθηκαν τα συμπεράσματα «πως μπορεί κάποιο μέρος να έχει μεγαλύτερη περίμετρο, αλλά μικρότερο εμβαδόν ή μικρότερη περίμετρο, αλλά μεγαλύτερο εμβαδόν» (μαθήτρια Θ) και ότι «αν ένα μέρος είναι μεγαλύτερο, δεν έχει σχέση η περίμετρος, αλλά έχει σχέση το εμβαδόν» (μαθήτρια Ζ). Στη δραστηριότητα «Γειτονιές της Θεσσαλονίκης», ενδεικτική είναι η απάντηση των μαθητών που ανέλαβαν να συγκρίνουν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το τετράγωνο: «Μεγαλύτερο είναι το τετράγωνο γιατί έχουν ίση περίμετρο και μεγαλύτερα είναι αυτά που είναι κανονικά». Παρομοίως, στη σύγκριση κανονικού πενταγώνου-ισόπλευρου τριγώνου δόθηκε η απάντηση: «Είναι κανονικά και ισοπεριμετρικά μεταξύ τους. Παρόλο που έχουν την ίδια περίμετρο, επειδή το πεντάγωνο έχει περισσότερες γωνίες από το τρίγωνο, υποθέσαμε ότι το πεντάγωνο είναι μεγαλύτερο.» Από την άλλη, υπήρξε μαθητής που υπολόγισε λάθος τις περιμέτρους, ενώ ένας μαθητής είχε αρχικά τη διάθεση να εργαστεί στη GI, αναλύοντας τα σχήματα και υπολογίζοντας με τύπους, κάτι που ήταν δύσκολο, αφού τα σχήματα ήταν υπό σμίκρυνση.

5.2. Αυτοαναφορές των μαθητών για τη μάθησή τους

Στο τελευταίο φύλλο εργασίας υπήρχαν αρκετές ερωτήσεις αναστοχασμού. Σε αυτές δεν απάντησαν όλοι, ενώ κάποιοι απάντησαν γενικόλογα. Οι υπόλοιποι αναφέρθηκαν:

- Στις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού. Ενδεικτικά, η μαθήτρια Υ ανέφερε ως ιδέα που άλλαξε ότι «πάντα όποια σχήματα έχουν ίδια περίμετρο έχουν και ίδιο εμβαδό», ενώ ως νέα της ιδέα ότι «το εμβαδό με την περίμετρο δεν έχουν σχέση». Επίσης, ο μαθητής Δ έγραψε πως κάτι που τον εξέπληξε είναι «ότι μικρά και μεγάλα σχήματα έχουν την ίδια περίμετρο».
- Σε ιδέες ή διαδικασίες που συνδέονται με τον πειραματισμό. Ενδεικτικά, η μαθήτρια Ι έγραψε πως μια ιδέα που άλλαξε ήταν ότι «για να βρω τη περίμετρο πίστευα πως κάνω πλευρά · πλευρά», αλλά «Ανακάλυψα ότι κάνουμε πλευρά + πλευρά + πλευρά + πλευρά...». Επιπλέον, ο μαθητής Η έγραψε πως κάτι που

έμαθε είναι «ότι μπορώ να βρω πιο [*sic*] σχήμα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν χωρίς να το υπολογίσω», που δείχνει την κυριαρχία του υπολογισμού με τύπους στις μέχρι τότε εμπειρίες των μαθητών. Ομοίως, ο μαθητής Χ ανέφερε πως κάτι που τον εξέπληξε είναι «ότι υπάρχουν τόσες διαφορετικές μέθοδοι για να μετρήσεις ποιο σχήμα είναι μεγαλύτερο».

- Στις μέλισσες και στο σχήμα των κελιών, ως κάτι που τους εξέπληξε.
- Στη στάση τους για τη Γεωμετρία. Η μαθήτρια Ζ ανέφερε ότι πριν δεν αγαπούσε τη Γεωμετρία, ενώ με αυτά τα μαθήματα της άρεσε κάπως περισσότερο, γιατί τα κατάλαβε. Παρομοίως, η μαθήτρια Υ έγραψε πως κάτι που την εξέπληξε είναι ότι «πίστευα ότι η γεωμετρία ήταν δύσκολη, μπερδευτική και ακατανόητη αλλά διαπίστοσα [*sic*] μετά από αυτά τα μαθήματα ότι είναι πιο εύκολη».

Επιπλέον, οι μαθητές κλήθηκαν να γράψουν κάτι που τους δυσκόλεψε. Εδώ, δύο μαθητές ανέφεραν το πρόβλημα με τις κηρήθρες, ένας τη μέθοδο της πλακόστρωσης και άλλοι δύο τη μέθοδο καταμέτρησης τετραγωνιδίων, τέσσερις έγραψαν πως τους δυσκόλεψε να βρουν το εμβαδόν είτε του εξαγώνου είτε του τριγώνου, ενώ ένας αναφέρθηκε στο γεγονός ότι «Υπάρχουν σχήματα με ίση περίμετρο». Τέλος, αρκετοί έγραψαν πως δεν τους δυσκόλεψε κάτι ή δεν έγραψαν τίποτα.

5.3. Αξιολόγηση των πηγών και του προβλήματος από τους μαθητές

Στο ίδιο φύλλο εργασίας οι μαθητές ρωτήθηκαν, επίσης, πόσο τους άρεσε το καθένα από τα κείμενα που χρησιμοποιήθηκαν στα μαθήματα. Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να βαθμολογήσουν κάθε κείμενο με ένα βαθμό από το 1, που συμβολίζει το λιγότερο, μέχρι και το 5, που συμβολίζει το περισσότερο. Το ιστορικό σημείωμα βαθμολογήθηκε κατά μέσο όρο με 3,45 βαθμούς ($SD=0{,}91$, $N=22$), ενώ το κείμενο του Πάππου με 4,36 βαθμούς ($SD=0{,}66$, $N=22$). Τέλος, το κείμενο του Πολύβιου, κατά τη διδασκαλία του οποίου απουσίαζαν δύο μαθητές, βαθμολογήθηκε κατά μέσο όρο με 3,85 βαθμούς ($SD=1{,}31$, $N=20$).

Για να διαπιστωθεί αν υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ως προς το πόσο άρεσαν οι 20 κοινοί μαθητές τα τρία κείμενα, χρησιμοποιήθηκε το Friedman test, που έδειξε ότι η διαφορά ήταν σημαντική ($\chi^2=6{,}818$, $df=2$, $p=0{,}033<0{,}05$). Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας για τις απαντήσεις αυτών των 20 μαθητών το Wilcoxon Signed Ranks Test με διόρθωση Bonferroni, βρέθηκε ότι η διαφορά ήταν στατιστικά σημαντική στη σύγκριση του κειμένου του Πάππου με το ιστορικό σημείωμα ($Z=-2{,}857$, $p=0{,}004<0{,}017$), αλλά όχι στη σύγκριση του κειμένου του Πάππου με αυτό του Πολύβιου ($Z=-1{,}543$, $p=0{,}123$) ούτε στη σύγκριση του κειμένου του Πολύβιου με το ιστορικό σημείωμα ($Z=-0{,}997$, $p=0{,}319$).

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τις απαντήσεις συνολικά των 22 μαθητών που διδάχτηκαν το κείμενο και του Πάππου και του βιβλίου, η διαφορά ήταν πάλι στατιστικά σημαντική (Z=-3,137, p=0,002). Μάλιστα, μόλις δύο από τους 22 μαθητές άρεσαν περισσότερο το ιστορικό σημείωμα, έναντι 15 μαθητών που άρεσαν περισσότερο το κείμενο του Πάππου, ενώ πέντε μαθητές άρεσαν εξίσου τα δύο κείμενα.

Στο ίδιο φύλλο εργασίας, οι μαθητές συνέκριναν, επίσης, τη δυσκολία και το ενδιαφέρον που τους προκάλεσε το πρόβλημα με τις κηρήθρες, σε σχέση με τα προβλήματα που συνήθως συναντούν στα Μαθηματικά. Εδώ, οι 11 από τους 22 μαθητές εκτίμησαν ότι το πρόβλημα με τις κηρήθρες ήταν πιο εύκολο, ενώ οκτώ απάντησαν ότι ήταν πιο δύσκολο και τρεις ότι είχε τον ίδιο βαθμό δυσκολίας. Ωστόσο, οι 21 από τους 22 μαθητές βρήκαν αυτό το πρόβλημα πιο ενδιαφέρον από τα συνήθη προβλήματα, ενώ ένας μαθητής απάντησε ότι ήταν το ίδιο ενδιαφέρον.

Συγκρίνοντας το δηλωμένο βαθμό δυσκολίας του προβλήματος με τη μέθοδο που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά την επίλυσή του, προκύπτει ότι από όσους εργάστηκαν με την αποκοπή-επικόλληση κανείς δεν έκρινε το πρόβλημα ως πιο δύσκολο. Αντίθετα, τα 3/4 όσων καταμέτρησαν τετραγωνίδια θεώρησαν το πρόβλημα πιο δύσκολο. Περαιτέρω, ανα-κωδικοποιώντας τις απαντήσεις (1=πιο δύσκολο, 0=ίδιος βαθμός δυσκολίας, -1=πιο εύκολο), φαίνεται σαφέστερα ότι οι μαθητές που εργάστηκαν με την αποκοπή-επικόλληση και την πλακόστρωση θεώρησαν κατά μέσο όρο το πρόβλημα ως πιο εύκολο (μέσος βαθμός δυσκολίας -0,5 και -0,3 αντίστοιχα) σε σχέση με τους μαθητές που εργάστηκαν με την καταμέτρηση τετραγωνιδίων και τον υπολογισμό με τύπους (0,5 και 0 αντίστοιχα). Είναι, επίσης, ενδιαφέρον ότι πέντε μαθητές που γενικά είχαν αδυναμίες στα Μαθηματικά, αξιολόγησαν το πρόβλημα ως πιο εύκολο.

Στις συνεντεύξεις μετά την παρέμβαση, ζητήθηκε από τους μαθητές να εξηγήσουν αυτές τις εκτιμήσεις τους. Ενδεικτικά, ο μαθητής Τ υποστήριξε:

Απ.: Τα προβλήματα που λύνουμε συνήθως στο βιβλίο είναι πιο δύσκολα.

Ερ.: Τι είναι αυτό που τα κάνει πιο δύσκολα;

Απ.: Εεε... όταν δεν καταλαβαίνω, αυτό μου φαίνεται δύσκολο.

Επίσης, ο μαθητής Α έκρινε το πρόβλημα ως πιο εύκολο, γιατί «δε χρειαζόταν πολλούς υπολογισμούς και τέτοια» και ο μαθητής Γ γιατί «ήμασταν περισσότερα παιδιά και συνεργαζόμασταν». Στον αντίποδα, ο μαθητής Π π.χ. έκρινε το πρόβλημα πιο δύσκολο, γιατί «ήταν πιο πολύπλοκο», ενώ ο μαθητής Ξ, που είχε εργαστεί με την πλακόστρωση, θεώρησε το πρόβλημα ως πιο δύσκολο, γιατί «σε προβλημάτιζε με τα σχήματα, αν χωράει, αν αφήνει κενό, αν πρέπει... αν έπρεπε να βάλεις κάτι άλλο».

Όσον αφορά το ενδιαφέρον για το πρόβλημα, 12 μαθητές αναφέρθηκαν με ρητό και σαφή τρόπο στη φύση, τις μέλισσες, τις κηρήθρες ή και τους αρχαίους Έλληνες και, γενικότερα, σε ό,τι αποτελεί το πλαίσιο του προβλήματος. Χαρακτηριστικές είναι οι απαντήσεις:

- «Μάθαμε και πολλά πράματα για τη Γεωμετρία... πολλούς τρόπους για να βρούμε το εμβαδόν και την περίμετρο ενός σχήματος, αλλά και μάθαμε για την πραγματικότητα, γιατί άραγε οι μέλισσες χρησιμοποιούν αυτό το σχήμα.» (μαθήτρια Ι)
- «Είχες περιέργεια να το... δεις, είναι με τη φύση και... μυστήριο είναι αυτό που κάνουν οι μέλισσες, ενώ τα προβλήματα του βιβλίου ας πούμε είναι πιο απλά.» (μαθήτρια Θ)
- «Μ' άρεσε με το παράδειγμα που το κάναμε, δηλαδή με τις μέλισσες και τις κηρήθρες και το κείμενο που έλεγε... Αυτό ήταν σαν μια ιστορία που έπρεπε να λύσεις.» (μαθήτρια Μ)

Από την άλλη, ο μαθητής Β συνέδεσε ρητά τη δυσκολία με το ενδιαφέρον: «Ήτανε πιο δύσκολο, είχε ενδιαφέρον να το λύσεις». Υπήρχε, επίσης, μία αναφορά στο γεγονός ότι με αυτό το πρόβλημα έχουν ασχοληθεί οι μαθηματικοί και μία αναφορά στο ότι έτσι μάθαιναν «πώς η Γεωμετρία ανακαλύφτηκε» (μαθητής Ξ), τρεις αναφορές στο γεγονός ότι η εργασία έγινε κατά ομάδες και δύο αναφορές ότι το πρόβλημα ήταν ασυνήθιστο χαρακτηριστική είναι εδώ η απάντηση: «τέτοιο πρόβλημα εγώ δεν είχα ξανακάνει και γι' αυτό με άρεσε» (μαθητής Χ).

6. Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα, η Ιστορία των Μαθηματικών αξιοποιήθηκε με ποικίλους στόχους, που σχετίζονται μεταξύ τους, όπως σχετίζονται και με την ανάπτυξη των ΓΧΕ των μαθητών. Ειδικότερα, οι ιστορικές πηγές αποτέλεσαν την πηγή μαθηματικών προβλημάτων και τα προβλήματα αποτελούν το λόγο ύπαρξης των ΓΧΕ (Kuzniak, 2012). Επιπλέον, οι πηγές και το ιστορικό σημείωμα αποτέλεσαν μέσο κινητοποίησης και η κινητοποίηση αποτελεί σημαντικό μέσο για την ενεργοποίηση των μαθητών στην προσπάθεια επίλυσης των προβλημάτων (Brousseau, 2002). Θα μπορούσε εδώ να υποστηριχθεί ότι και τα τρία κείμενα συνέβαλαν στην κινητοποίηση των μαθητών, αφού αξιολογήθηκαν θετικά. Έτσι, δε βρήκε εδώ εφαρμογή το επιχείρημα ότι πολλοί μαθητές μπορεί να επηρεαστούν αρνητικά, γιατί δεν αγαπούν την Ιστορία (Jankvist, 2009, Tzanakis et al., 2000).

Ειδικά το κείμενο του Πάππου αξιοποιήθηκε και ως μέσο ενεργοποίησης προϋπαρχουσών ιδιοτήτων (π.χ. τι είναι η περίμετρος) και εμπλουτισμού με νέες ιδιότητες (π.χ. τι είναι τα κανονικά σχήματα), οι οποίες ήταν απαραίτητες για την ανάπτυξη των προσωπικών ΓΧΕ και την επίλυση του προβλήματος με τις κηρήθρες. Εδώ, επίσης, οι μαθητές είχαν μια πρώτη γνωριμία με μια νέα ιδιότητα-πρόταση για τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού. Αυτή η πρόταση, όμως, εκλήφθηκε από ορισμένους όχι ως κάτι προς επικείμενη διερεύνηση, αλλά ως βέβαιη γνώση, γεγονός που μπορεί να αποδοθεί στο σύνηθες διδακτικό συμβόλαιο, βάσει του οποίου οποιοδήποτε σχολικό κείμενο περιέχει αληθείς και μόνο γνώσεις, που δεν μπορούν να αμφισβητηθούν.

Είναι πιθανό, επίσης, να αντανακλά και μια ευρύτερη αντίληψη, βάσει της οποίας οποιαδήποτε μαθηματική γνώση είναι γενικά και διαχρονικά αληθής και, επομένως, ένας μαθηματικός δεν μπορεί να κάνει λάθος.

Όπως αναφέρθηκε, οι ιστορικές πηγές αποτέλεσαν την πηγή μαθηματικών προβλημάτων. Ακολούθως, το πρόβλημα με τις κηρήθρες αποτέλεσε μέσο για τον εμπλουτισμό των προσωπικών ΓΧΕ με νέα εργαλεία (ημιδιαφανές πλέγμα), αλλά και με μεθόδους πειραματισμού που προβάλλουν το εμβαδόν ως ιδιότητα και που ενώ ήταν διδαγμένες από μικρότερες τάξεις, είχαν λησμονηθεί.

Επιπλέον, τα προβλήματα αποτελούν, κατά τον Brousseau (2002), μέσο υπέρβασης των εσφαλμένων αντιλήψεων των μαθητών και το κείμενο του Πολύβιου φαίνεται να ενίσχυσε περισσότερο αυτήν την προσπάθεια υπέρβασης. Το κείμενο αυτό δεν αποτελεί κλασικό κείμενο αντιπαράθεσης γραμμένο για διδακτικούς σκοπούς, αλλά ιστορική πηγή, με τη συνθετότητά της. Ωστόσο, η αναφορά σε εσφαλμένες αντιλήψεις σχετικές με τις έννοιες περιμέτρου-εμβαδού και η γνώση ότι τα σφάλματα αυτά γίνονταν και από σημαντικά πρόσωπα της Ιστορίας έδωσε στους μαθητές το ερέθισμα και δημιούργησε και ένα κλίμα μεγαλύτερης άνεσης για να σκεφτούν και να εκφραστούν και για τον εαυτό τους. Αυτό σχετίζεται και πάλι με τους προσωπικούς ΓΧΕ, αφού οι αντιλήψεις αφορούν το θεωρητικό σύστημα αναφοράς του ΓΧΕ.

Εδώ, όμως, πρέπει να λαμβάνεται υπόψη ότι η αλλαγή των απόψεων είναι δύσκολη υπόθεση και κανένα κείμενο από μόνο του δεν επαρκεί για όλους (Tippett, 2010). Αυτό αφορά και τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού, στις οποίες δυσκολεύονται και μεγαλύτεροι μαθητές και ενήλικες (Kellogg, 2010, Woodward & Byrd, 1983) και για τις οποίες έχει παρατηρηθεί ότι οι εσφαλμένες αντιλήψεις συχνά επανέρχονται μετά τη διδασκαλία (Douady & Perrin-Glorian, 1989, Kellogg, 2010, Vighi, 2010).

Πέραν τούτων, είναι ενδιαφέρον ότι δύο μαθήτριες αναφέρθηκαν αυθόρμητα στη στάση τους για τη Γεωμετρία, αν και αυτός δεν ήταν ο πρώτιστος σκοπός της παρέμβασης.

Όσον αφορά την αξιολόγηση των ιστορικών κειμένων, οι μαθητές κατά μέσο όρο απάντησαν ότι τους άρεσαν και τα τρία κείμενα, περισσότερο του Πάππου, έπειτα του Πολύβιου και, τέλος, του βιβλίου. Η διαφορά ήταν στατιστικά σημαντική στη σύγκριση των κειμένων του Πάππου και του βιβλίου. Η ερμηνεία εδώ είναι πολλαπλή:

- Η σειρά των τριών κειμένων αντικατοπτρίζει το χρόνο που διατέθηκε στο καθένα. Αλλά αν ο τρόπος που αξιοποιήθηκε αυτός ο χρόνος δεν ήταν αρεστός στους μαθητές, τότε περισσότερος χρόνος θα σήμαινε, ίσως, μεγαλύτερη απαρέσκεια.
- Η μεγαλύτερη προτίμηση των μαθητών για τις δύο πηγές αφενός συμβαδίζει με την οδηγία των Schunk et al. (2010) να χρησιμοποιείται υλικό από πρωτότυπες πηγές και αφετέρου μπορεί να αποδοθεί στο ότι αυτές πλαισιώθηκαν με μαθηματικό πρόβλημα, σε αντίθεση με το ιστορικό σημείωμα.

- Ειδικά για το κείμενο του Πάππου ακολουθήθηκε η πρακτική της μεγαλόφωνης ανάγνωσης από τον εκπαιδευτικό, που πιθανότατα διευκόλυνε την κατανόηση και προσέδωσε στο κείμενο ζωντάνια και παραστατικότητα, αυξάνοντας έτσι το ενδιαφέρον (Ariail & Albright, 2006, Ivey & Broaddus, 2001, Schraw et al., 1995).
- Κυρίως φαίνεται ότι επηρέασαν τα χαρακτηριστικά του κειμένου του Πάππου και το θέμα του: η κοινωνία των μελισσών και η κανονικότητα στη φύση είναι ζητήματα που από την αρχαιότητα είχαν προσελκύσει το ενδιαφέρον φιλοσόφων και μαθηματικών και ήταν και ευρύτερα γνωστά (Cuomo, 2000). Μπορεί, λοιπόν, να υποστηριχτεί ότι εντάσσονται και αυτά τα ζητήματα σε εκείνα τα θέματα που σχετίζονται με τη φύση και που υποστηρίζεται ότι συχνά προκαλούν το ενδιαφέρον (Bergin, 1999). Άλλωστε, όπως αναφέρθηκε: «είναι με τη φύση και... μυστήριο είναι αυτό που κάνουν οι μέλισσες» (μαθήτρια Θ). Γενικότερα, πρόκειται για μια λογοτεχνική εισαγωγή σε βιβλίο, γραμμένη εξαρχής με στόχο να προκαλέσει το ενδιαφέρον. Εξάλλου, το απόσπασμα που επιλέχτηκε δεν περιέχει ονόματα και χρονολογίες ούτε αριθμούς, σε αντίθεση με τα άλλα δύο κείμενα.

Αναφορικά με το βαθμό δυσκολίας του προβλήματος με τις κηρήθρες σε σχέση με τα συνήθη προβλήματα, οι κρίσεις των μαθητών ήταν μοιρασμένες: ελαφρώς περισσότεροι ήταν όσοι έκριναν το πρόβλημα πιο εύκολο. Στις διαφορετικές κρίσεις επηρέασε, καταρχάς, η μέθοδος με την οποία εργάστηκε ο κάθε μαθητής. Επιπλέον, φαίνεται ότι οι μαθητές που γενικά υστερούσαν στα Μαθηματικά έκριναν το πρόβλημα ως πιο εύκολο λαμβάνοντας υπόψη την ομαδική εργασία, την απουσία υπολογισμών και την ύπαρξη σχημάτων κομμένων σε χαρτόνι και αντίστοιχων υλικών. Έτσι, είχαν και αυτοί κάτι να συνεισφέρουν. Ενδεικτικό είναι, άλλωστε, ότι στην ομάδα που εργάστηκε με τύπους η πιο δύσκολη ανασύνθεση του εξαγώνου έγινε από μαθητή που γενικά υστερούσε στα Μαθηματικά. Επίσης, η δόμηση του προβλήματος μέσω των ερωτήσεων του συνοδευτικού φύλλου εργασίας είναι πιθανό να συνετέλεσε ώστε να το αξιολογήσουν ως πιο εύκολο όσοι ακριβώς δυσκολεύονται να οργανώσουν την επίλυση προβλημάτων.

Από την άλλη, οι 21 από τους 22 μαθητές έκριναν το πρόβλημα ως πιο ενδιαφέρον σε σχέση με τα συνήθη προβλήματα. Αν αυτό συνδυαστεί με τις απαντήσεις για το βαθμό δυσκολίας, θα μπορούσε να θεωρηθεί ως ένδειξη ικανοποιητικής ισορροπίας ανάμεσα στις απαιτήσεις του προβλήματος και στο επίπεδο του κάθε μαθητή. Σε αυτήν την ισορροπία συνέβαλε, όπως αναφέρθηκε, και ο πρακτικός χαρακτήρας της δραστηριότητας. Τα επιχειρήματα, εξάλλου, των μαθητών δείχνουν ότι πηγές ενδιαφέροντος ήταν η ομαδική εργασία, ο ασυνήθιστος χαρακτήρας του προβλήματος και, πρωτίστως, το πλαίσιο του προβλήματος. Πρόκειται για παράγοντες που αναφέρονται και στη βιβλιογραφία (Bergin, 1999, Mitchell, 1993, Schunk et al., 2010) και που μπορεί να επηρέασαν άμεσα και έμμεσα. Η ομαδική εργασία π.χ. φαίνεται από τις απαντήσεις των μαθητών ότι επηρέασε και έμμεσα, διευκολύνοντας την εργασία και παρεμβαίνοντας έτσι στη σχέση βαθμός πρόκλησης - επίπεδο μαθητών. Όσον αφορά το πλαίσιο του προβλήματος, αυτό είχε καθοριστεί από το κείμενο του Πάππου και φαίνεται ότι ο συνδυασμός κειμένου και προβλήματος συνέδεσε τη γνώση με τα ερωτήματα που τη γέννησαν και έδωσε νόημα στη δραστηριότητα.

Σημείωση

1. Το 9ο βιβλίο των *Ιστοριών* σώζεται σε αποσπάσματα και η σειρά τους δεν είναι απολύτως βέβαιη. Σε άλλες εκδόσεις ή μεταφράσεις, το απόσπασμα αυτό εντάσσεται στο 9.21. Στην έκδοση του Büttner-Wobst εντάσσεται στο 9.26a και αυτό αποδέχτηκε και ο Walbank (1967).

Αναφορές

Ariail, M. & L.K. Albright (2006) A survey of teachers' read-aloud practices in middle schools. *Reading Research and Instruction,* 45: 69-89.

Bergin, D.A. (1999) Influences on classroom interest. *Educational Psychologist,* 34: 87-98.

Brousseau, G. (2002) *Theory of didactical situations in Mathematics* (eds. & trans. N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield). New York: Kluwer Academic.

Cooke, R. (2005) *The history of mathematics: A brief course*. Hoboken, NJ: Wiley (2nd ed.).

Cuomo, S. (2000) *Pappus of Alexandria and the mathematics of late antiquity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Douady, R. & M.J. Perrin-Glorian (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics,* 20: 387-424.

Duval, R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10: 5-53.

Furinghetti, F. & L. Radford (2008) Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New York: Routledge (2nd ed.), 626-655.

Georgia Department of Education (2014, July) *Common Core Georgia Performance Standards Framework. Third Grade mathematics. Unit 4: Geometry*. Available: https://www.georgiastandards.org/CommonCore/Common%20Core%20Frameworks/CCGPS_Math_3_Unit4Framework.pdf [9-11-2014]

Hales, T.C. (2001) The honeycomb conjecture. *Discrete & Computational Geometry,* 25: 1-22.

Heath, T. (1921) *A history of Greek mathematics*. Oxford: Clarendon Press (Vol. 2).

Jahnke, H.N., A. Arcavi, E. Barbin, O. Bekken, F. Furinghetti, A. El Idrissi... C. Weeks (2000) The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.) *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic, 291-328.

Jankvist, U.T. (2009) *Using history as a 'goal' in mathematics education* (Doctoral dissertation). Roskilde University. Available: http://rudar.ruc.dk//bitstream/1800/4950/1/IMFUFA_464.pdf [11-1-2013]

Ivey, G. & K. Broaddus (2001) Just plain reading: A survey of what makes students want to read in middle school classrooms. *Reading Research Quarterly,* 36: 350-377.

Καριώτογλου, Π. (2006) *Παιδαγωγική γνώση περιεχομένου φυσικών επιστημών*. Θεσσαλονίκη: Γράφημα.

Κασσώτη, Ό., Π. Κλιάπης & Θ. Οικονόμου (2006) *Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

Kellogg, M.S. (2010) *Preservice elementary teachers' pedagogical content knowledge related to area and perimeter: A teacher development experiment investigating anchored instruction with web-based microworlds* (Doctoral dissertation). University of South Florida. Available: http://scholarcommons.usf.edu/etd/1679 [15-11-2012]

Kuzniak, A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* 6: 167-187.

Kuzniak, A. (2012, July) *Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations*. Regular lecture given at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea. Available: http://www.icme12.org/upload/submission/1922_F.pdf [24-10-2013]

Mitchell, M. (1993) Situational interest: Its multifaceted structure in the secondary school mathematics classroom. *Journal of Educational Psychology,* 85: 424-436.

Moreira-Baltar, P. & C. Comiti (1994) Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire/périmètre pour des rectangles. *Petit x,* 34: 5-29.

North Carolina Department of Public Instruction (2012) *Third Grade area and perimeter*. Available: http://maccss.ncdpi.wikispaces.net/file/view/3rdGradeUnit.pdf [20-5-2013]

Nunes, T., P. Light & J. Mason (1993) Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction,* 3: 39-54.

Schraw, G., R. Bruning & C. Svoboda (1995) Sources of situational interest. *Journal of Literacy Research,* 27: 1-17.

Schunk, D.H., P.R. Pintrich & J.L. Meece (2010) *Τα κίνητρα στην εκπαίδευση* (μτφρ. Μ. Κουλεντιανού, επιμ. Ν. Μακρής & Δ. Πνευματικός). Αθήνα: Gutenberg.

Tippett, C.D. (2010) Refutation text in science education: A review of two decades of research. *International Journal of Science and Mathematics Education,* 8: 951-970.

Tzanakis, C., A. Arcavi, C.C. de Sa, M. Isoda, C.K. Lit, M. Niss... M.K. Siu (2000) Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.) *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic, 201-240.

Vighi, P. (2010) Investigating comparison between surfaces. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.) *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique, 716-725.

Van de Walle, J.A. & L.A.H. Lovin (2006) *Teaching student-centered mathematics: Grades 3-5*. Boston: Pearson.

Vosniadou, S. & X. Vamvakoussi (2006) Examining mathematics learning from a conceptual change point of view: Implications for the design of learning environments. In L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boekaerts & S. Vosniadou (Eds.) *Instructional psychology: Past, present and future trends. Sixteen essays in honour of Erik De Corte*. Oxford: Elsevier, 55-72.

Walbank, F.W. (1967) *A historical commentary on Polybius*. Oxford: Clarendon Press (Vol. 2).

Woodward, E. & F. Byrd (1983) Area: included topic, neglected concept. *School Science and Mathematics,* 83: 343-347.

Zacharos, K. (2006) Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior,* 25: 224-239.

Παράρτημα: *Μεταφράσεις Ιστορικών πηγών που χρησιμοποιήθηκαν στη διδασκαλία*

ΠΑΠΠΟΣ Ο ΑΛΕΞΑΝΔΡΙΝΟΣ: «Συναγωγή» ή «Μαθηματική Συλλογή»

Βιβλίο Ε΄: Πρόλογος για τη σοφία των μελισσών

Την καλύτερη και τελειότερη κατανόηση της σοφίας και των Μαθηματικών την έδωσε ο Θεός στους ανθρώπους, αλλά ένα μικρό μερίδιο από αυτά το παραχώρησε, επίσης, σε κάποια από τα μη λογικά ζώα. Στους ανθρώπους, λοιπόν, που είναι λογικά όντα, παραχώρησε την ικανότητα να κάνουν τα πάντα με βάση τη λογική και την απόδειξη. Στα υπόλοιπα ζώα, όμως, δώρισε την ικανότητα να αποκτά το καθένα - όχι με τη λογική, αλλά με κάποια φυσική προνοητικότητα - μόνο όσα είναι χρήσιμα και ωφέλιμα για τη ζωή.

Αυτό μπορεί κάποιος να το παρατηρήσει ότι ισχύει στα περισσότερα είδη ζώων, περισσότερο, όμως, στις μέλισσες. Διότι η τάξη και η υπακοή τους σε αυτές που κυβερνούν την κοινότητά τους είναι πραγματικά αξιοθαύμαστες. Αλλά ακόμη πιο αξιοθαύμαστη είναι η φιλοτιμία τους, η καθαριότητα στη συγκομιδή του μελιού, η προνοητικότητα και η φροντίδα τους για τη διατήρησή του. Πιθανώς επειδή οι θεοί έχουν εμπιστευθεί σε αυτές το έργο της μεταφοράς στους πιο καλλιεργημένους ανθρώπους κάποιου μεριδίου από την αμβροσία, δε θεώρησαν σωστό να το σκορπούν αυτό άσκοπα στο έδαφος ή σε ξύλο ή σε ένα άλλο άμορφο και ακανόνιστο υλικό. Αλλά, συλλέγοντας τα ομορφότερα από τα πιο γλυκά άνθη που φυτρώνουν στη γη, κατασκευάζουν από αυτά, για την τοποθέτηση του μελιού, αγγεία, τα οποία ονομάζονται κηρήθρες, όλα ίσα μεταξύ τους, όμοια, δίπλα το ένα στο άλλο και εξαγωνικά ως προς το σχήμα.

Και το ότι τα έχουν σχεδιάσει αυτά μέσω κάποιας γεωμετρικής προνοητικότητας μπορούμε να το καταλάβουμε με αυτόν τον τρόπο: θεωρούσαν αναγκαίο τα σχήματα να είναι τέτοια, που να βρίσκονται εντελώς δίπλα το ένα στο άλλο και να έχουν τις πλευρές τους κοινές, ώστε καμία ξένη ουσία να μην εισέλθει στα κενά ανάμεσά τους και μολύνει το έργο τους. Τρία ευθύγραμμα σχήματα θα μπορούσαν να ικανοποιήσουν αυτήν την προϋπόθεση. Και εννοώ κανονικά σχήματα, ισόπλευρα και ισογώνια, διότι τα ανόμοια σχήματα δε θα ικανοποιούσαν τις μέλισσες. Λοιπόν, τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα εξάγωνα μπορούν, όταν είναι δίπλα το ένα στο άλλο, να έχουν τις πλευρές τους κοινές. Εφόσον υπάρχουν λοιπόν τρία σχήματα που είναι από μόνα τους ικανά να γεμίσουν τελείως το χώρο γύρω από το ίδιο σημείο - το τρίγωνο, το τετράγωνο και το εξάγωνο - οι μέλισσες, με τη σοφία τους, επέλεξαν για αυτό που προετοιμάζουν το σχήμα που έχει τις περισσότερες γωνίες, διότι αντιλήφθηκαν ότι αυτό χωράει περισσότερο μέλι από το καθένα από τα υπόλοιπα.

Οι μέλισσες, λοιπόν, γνωρίζουν μόνο αυτό που είναι χρήσιμο σε αυτές. Δηλαδή, ότι το εξάγωνο είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο και το τρίγωνο και μπορεί να χωρέσει περισσότερο μέλι, με την ίδια δαπάνη υλικών για την κατασκευή καθενός. Εμείς, ωστόσο, ισχυριζόμενοι ότι κατέχουμε μεγαλύτερο μερίδιο σοφίας από τις μέλισσες, θα ερευνήσουμε κάτι ευρύτερο. Δηλαδή, ότι από όλα τα ισόπλευρα και ισογώνια επίπεδα σχήματα που έχουν ίση περίμετρο, μεγαλύτερο είναι πάντοτε αυτό που έχει το μεγαλύτερο αριθμό γωνιών.

ΠΟΛΥΒΙΟΥ ΙΣΤΟΡΙΕΣ

Οι περισσότεροι άνθρωποι υπολογίζουν τα μεγέθη των προαναφερομένων [δηλαδή, των πόλεων και των στρατοπέδων] μόνο από την περίμετρο. Έτσι, όταν κάποιος πει ότι η πόλη της Μεγαλόπολης έχει περιφέρεια 50 σταδίων*, ενώ η Σπάρτη 48, αλλά η Σπάρτη έχει διπλάσιο μέγεθος από τη Μεγαλόπολη, ο ισχυρισμός φαίνεται σε αυτούς απίστευτος. Και αν κάποιος, θέλοντας να αυξήσει την απορία, έλεγε ότι είναι δυνατόν μια πόλη ή ένα στρατόπεδο, ενώ έχει περιφέρεια 40 σταδίων, να είναι διπλάσια από μία που έχει περίμετρο 100, τότε αυτός ο ισχυρισμός θα τους άφηνε εντελώς έκπληκτους. Ο λόγος για αυτό είναι ότι δε θυμούμαστε τα μαθήματα Γεωμετρίας που είχαμε διδαχτεί στα παιδικά μας χρόνια. Οδηγήθηκα να μιλήσω για αυτά, γιατί δεν είναι μόνο απλοί άνθρωποι, αλλά και κάποιοι από τους πολιτικούς και τους διοικητές του στρατού που έχουν μπερδευτεί μερικές φορές, απορώντας αν είναι δυνατό η Σπάρτη να είναι μεγαλύτερη από τη Μεγαλόπολη και μάλιστα κατά πολύ, ενώ έχει μικρότερη περιφέρεια· και άλλες φορές προσπαθώντας να υπολογίσουν τον αριθμό των ανδρών, εξετάζοντας μόνο το μήκος της περιφέρειας ενός στρατοπέδου.

***Στάδιο:** Αρχαία μονάδα μέτρησης μήκους.
1 στάδιο ισούται με περίπου 185 μ.