

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

## των Επιμελητών της Έκδοσης

Η ιδέα της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην Μαθηματική Εκπαίδευση (ΜΕ) εμφανίζεται ήδη από το δεύτερο μισό του 19<sup>ου</sup> αιώνα όταν σπουδαίοι μαθηματικοί όπως οι A. De Morgan, F. Klein, H. Poincaré αναφέρονται σχετικά στο έργο τους και σημαντικοί ιστορικοί, όπως ο P. Tannery και αργότερα ο G. Loria, έδειξαν ενεργό ενδιαφέρον για το ρόλο που η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να διαδραματίσει στην Μαθηματική Εκπαίδευση. Όμως μια πιο συστηματική ανάπτυξη της ιδέας αυτής εμφανίζεται από τα τέλη της δεκαετίας του 1960 και εξής, όταν διάφορες εκδοχές της αρχίζουν να εφαρμόζονται στην πράξη με ποικίλους τρόπους, έτσι ώστε τα τελευταία 40 χρόνια περίπου να διαμορφωθεί σταδιακά ένας ενεργός ερευνητικός κλάδος της Μαθηματικής Εκπαίδευσης που πήρε συγκεκριμένη μορφή με την ίδρυση και ανάπτυξη της *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics*, της γνωστής ως ομάδας HPM, με δημοσιεύσεις ερευνητικών άρθρων, διοργάνωση σχετικών συνεδρίων, έκδοση συλλογικών τόμων κλπ.<sup>1</sup> Η ομάδα αυτή, που δημιουργήθηκε το 1972 κατά την διάρκεια του 2<sup>nd</sup> *International Congress on Mathematical Education* (ICME 2) στο Exeter της Μ. Βρετανίας είναι μία από τις δύο βασικότερες και παλαιότερες ομάδες μελέτης που τελούν υπό την αιγίδα της *Διεθνούς Επιτροπής για την Μαθηματική Εκπαίδευση* (ICMI: *International Commission on Mathematical Instruction*)<sup>2</sup>, έχοντας διατυπώσει τους βασικούς στόχους της εμπειριστατώμενα ήδη από το 1978<sup>3</sup>.

Δίνοντας έμφαση στην ενσωμάτωση της ιστορίας και της επιστημολογίας των Μαθηματικών κατά την διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών συνιστά ένα φυσιολογικό τρόπο έκθεσης των Μαθηματικών εν τη γενέσει τους, σε τρόπον ώστε να οδηγείται κανείς σε πληρέστερη κατανόηση συγκεκριμένων μαθηματικών θεμάτων αλλά και σε μια βαθύτερη αντίληψη του τί είναι τα Μαθηματικά συνολικά ως επιστημονικό πεδίο. Τούτο είναι σημαντικό καθώς βοηθά να συνειδητοποιήσει κανείς ότι τα Μαθηματικά είναι αποτέλεσμα συνεισφορών από πολλές και διαφορετικές παραδόσεις· βρισκόταν ανέκαθεν σε ένα συνεχή διάλογο με τις άλλες επιστήμες, την φιλοσοφία, τις τέχνες και την τεχνολογία· έχουν υποστεί πολλές αλλαγές μέσα στον χρόνο τόσο ως προς το επιστημονικό τους περιεχόμενο, όσο και ως προς το τί νοείται ως Μαθηματικά· αποτελούν ένα σταθερά καθοριστικό παράγοντα υποστήριξης της επιστημονικής, τεχνικής, καλλιτεχνικής και κοινωνικής εξέλιξης.

Οι ερευνητικές και διδακτικές προσπάθειες προς αυτή την κατεύθυνση έχουν οδηγήσει σε μεγάλη ποικιλία πειραματικών ευρημάτων, τον σχεδιασμό και την παραγωγή διδακτικού υλικού για τους μαθητές και επιμορφωτικού υλικού για τους εκπαιδευτικούς και την ανάπτυξη θεωρητικών ιδεών για την συστηματοποίηση

όλων των ανωτέρω προς όφελος της διδακτικής και ερευνητικής κοινότητας. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να αποκτήσει μια εικόνα σε σχέση και με τις πιο πρόσφατες εξελίξεις στον τομέα αυτό μέσω της συνοπτικής βιβλιογραφίας στο τέλος του παρόντος εισαγωγικού σημειώματος, η οποία είναι σχετικά εύκολα προσβάσιμη και βάσει της οποίας μπορεί να αναζητήσει μια μεγαλύτερη και συνάμα πιο εξειδικευμένη βιβλιογραφία στα αγγλικά και ελληνικά.

Έχοντας ως στόχο να γνωστοποιήσουμε στην ευρύτερη ελληνική Παιδαγωγική Κοινότητα το σύγχρονο αυτό πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης, στο παρόν αφιέρωμα του περιοδικού *Επιστήμες της Αγωγής* συμπεριλάβαμε και επιμεληθήκαμε εργασίες ελλήνων αλλά και ξένων ερευνητών, με την ελπίδα ότι τόσο τα ίδια τα κείμενα, όσο και η σε αυτά αναφερόμενη περαιτέρω βιβλιογραφία θα αποτελέσουν κίνητρο και οδηγό για τους αναγνώστες να προβληματιστούν και ενδεχομένως να ασχοληθούν ερευνητικά και διδακτικά με την διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας και Επιστημολογίας των Μαθηματικών.

Επιλέχθηκαν πέντε κείμενα ελλήνων συγγραφέων και τέσσερα ξένων γραμμένων στα αγγλικά με περιληψη στα ελληνικά.

Στα τρία πρώτα κείμενα γίνεται εμπειριστατωμένη αναφορά μεταξύ άλλων και σε γενικότερες ιδέες και μεθοδολογικές προσεγγίσεις που έχουν διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην μορφοποίηση του θεωρητικού υποβάθρου για την εισαγωγή και ανάπτυξη μιας ιστορικής διάστασης στην Μαθηματική Εκπαίδευση. Πιο συγκεκριμένα:

Το άρθρο του **Γιάννη Θωμάϊδη** είναι μια εμπειριστατωμένη θεωρητική σύνθεση και επισκόπηση των παραγόντων που αφορούν στην αξιοποίηση της Ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών καθώς και της σχετικής διδακτικής έρευνας, δίνοντας έμφαση στην περίπτωση της Άλγεβρας. Η εργασία συνεισφέρει στο να διαμορφώσει ο αναγνώστης μια συνολική θεώρηση του θέματος.

Στο άρθρο της, η **Tinne Kjeldsen** εξετάζει τον συνδυασμό της διερευνητικής προσέγγισης και της αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία με φοιτητές των Μαθηματικών, καθώς και τις επιδράσεις αυτής της διδακτικής προσέγγισης όσον αφορά στην βαθύτερη κατανόηση από τους φοιτητές της ίδιας της φύσης των Μαθηματικών. Εξετάζει επίσης, τις επιδράσεις αυτής της διδακτικής προσέγγισης σχετικά με τις δυνατότητες των φοιτητών - μελλοντικών καθηγητών να διδάξουν σε μαθητές. Ειδικότερα, παρουσιάζει το πρόγραμμα σπουδών στο Πανεπιστήμιο Roskilde της Δανίας που εστιάζεται στην υλοποίηση projects προσανατολισμένων στην επίλυση προβλημάτων και δίνει δύο τέτοια παραδείγματα, καθώς και ένα παράδειγμα εφαρμογής της προσέγγισης αυτής σε σχολική τάξη Λυκείου.

Στο άρθρο του ο **Man Keung Siu** μετά από μια σύντομη, αλλά περιεκτική αναφορά στην προσέγγιση θεμάτων της Μαθηματικής Εκπαίδευσης μέσω της Ιστορίας των Μαθηματικών, αναλύει τις σχετικές επιμορφωτικές δραστηριότητες μιας ομάδας

καθηγητών και στελεχών της εκπαίδευσης στην Κίνα (Hong Kong) με αντικείμενο την Ιστορία των Μαθηματικών και την αξιοποίησή της στην εκπαίδευση. Στις δραστηριότητες αυτές δίνεται έμφαση στη συγκριτική θεώρηση της εξέλιξης των Μαθηματικών στον αρχαίο Ανατολικό και στον Δυτικό κόσμο.

Στα υπόλοιπα πέντε κείμενα συζητούνται επί μέρους ερευνητικά θέματα στην περιοχή αυτή. Τα κείμενα παρουσιάζονται ανά βαθμίδα εκπαίδευσης, αρχίζοντας από την πρωτοβάθμια.

Στην εργασία του **Ματθαίου Αναστασιάδη** με τον **Κώστα Νικολαντωνάκη** αναλύεται μια πειραματική διδασκαλία με μαθητές ΣΤ' τάξης Δημοτικού Σχολείου για τα ισοπεριμετρικά σχήματα και τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού, στην οποία χρησιμοποιήθηκαν πρωτότυπες ιστορικές πηγές και ειδικότερα, κατάλληλα μεταφρασμένα αποσπάσματα από το Ε' Βιβλίο της *Μαθηματικής Συναγωγής* του Πάππου (4<sup>ος</sup> μ.Χ. αιώνας) και τις *Ιστορίες* του Πολυβίου (2<sup>ος</sup> π.Χ αιώνας). Το άρθρο, πέραν του ειδικού του ενδιαφέροντος, αναδεικνύει τις δυνατότητες που προσφέρει η κατάλληλη διδακτική αξιοποίηση ιστορικών πηγών στη διδασκαλία των Μαθηματικών στο επίπεδο του Δημοτικού Σχολείου.

Στην εργασία του ο **Βαγγέλης Παναγιώτου** παρουσιάζει την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του λογαρίθμου και μία διδακτική ακολουθία βασισμένη σε αυτήν, η οποία έχει εφαρμοστεί δύο φορές σε Β' τάξη ελληνικού Λυκείου. Πρόκειται για ένα θέμα – «πρόκληση» καθώς αφορά μία μαθηματική έννοια, η οποία ενώ είναι σήμερα πολύ χρήσιμη και σημαντική, εμφανίζεται αφ' ενός μεν σε μια μορφή αφηρημένη, αφ' ετέρου δε εντελώς διαφορετική από εκείνη που είχε αρχικά (16<sup>ος</sup>-17<sup>ος</sup> αιώνας) και η οποία υπήρξε καθοριστική για την διατύπωση και επίλυση υπολογιστικών προβλημάτων πολύ διαφορετικών από εκείνα στα οποία χρησιμεύει σήμερα.

Το άρθρο του **Adriano Demattè** με την **Fulvia Furinghetti** εξετάζει πλεονεκτήματα και δυσκολίες της λεγόμενης «ερμηνευτικής προσέγγισης» στην αξιοποίηση της Ιστορίας στην διδασκαλία των Μαθηματικών, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα μιας σχετικής πειραματικής διδασκαλίας σε τελειόφοιτους μαθητές ιταλικού Λυκείου θεωρητικής κατεύθυνσης, πάνω στην έννοια της συνάρτησης και ειδικότερα στην εκθετική και την λογαριθμική συνάρτηση, κατά την οποία χρησιμοποιήθηκαν πρωτότυπες ιστορικές πηγές (κείμενα του L. Euler – 18<sup>ος</sup> αιώνας - στα λατινικά). Η εργασία συνεισφέρει στην διερεύνηση της αποτελεσματικότητας, αλλά και των περιορισμών στην διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία των Μαθηματικών και αποτελεί, στο ίδιο πλαίσιο, μια διαφορετική προσέγγιση από εκείνην του άρθρου του Ε. Παναγιώτου, της ίδιας μαθηματικής έννοιας (εκείνης του λογαρίθμου).

Στο άρθρο του **Μιχάλη Κούρκουλου** με τον **Κωνσταντίνο Τζανάκη** αναλύεται μια πειραματική διδασκαλία με φοιτητές Παιδαγωγικού Τμήματος όππου, με την χρήση

κειμένων του A. Quetelet, Βέλγου μαθηματικού του 19<sup>ου</sup> αιώνα και πρωτοπόρου της εφαρμογής στατιστικών μεθόδων στις Κοινωνικές Επιστήμες, εξετάζεται η ενσωμάτωση μακροσκοπικών εμπειρικών στοιχείων (στατιστικών στοιχείων) στη φιλοσοφική συζήτηση για την ελεύθερη βούληση του ανθρώπου. Η εργασία πέραν του ειδικού της ενδιαφέροντος αναδεικνύει τις δυνατότητες που προσφέρει η κατάλληλη διδακτική αξιοποίηση υπαρχόντων ιστορικών δεσμών μεταξύ στατιστικής, πιθανοτήτων και φιλοσοφίας ακόμη και με φοιτητές που διαθέτουν πολύ λίγες βασικές γνώσεις στατιστικής.

Το άρθρο του **Uffe Jankvist** είναι πλούσιο σε πληροφορίες και ιδέες σχετικά με το θεωρητικό πλαίσιο που αποτελεί το υπόβαθρο μιας προσέγγισης στην διδασκαλία των Μαθηματικών, η οποία αξιοποιεί ουσιαδώς την Ιστορία των Μαθηματικών, συνδυαστικά και συμπληρωματικά με φιλοσοφικά ζητήματα για τα Μαθηματικά τα ίδια, αλλά και τις εφαρμογές τους. Στο πλαίσιο αυτό, το κείμενο εξετάζει την διδακτική έρευνα του συγγραφέα με προπτυχιακούς φοιτητές Μαθηματικών και χρήση πρωτότυπων πηγών στην περιοχή των Διακριτών Μαθηματικών και της Θεωρίας Γραφημάτων με ανάλυση περίπτωσης ενός προπτυχιακού φοιτητή που μελέτησε εκτενώς τέτοιες πηγές.

Τέλος στο άρθρο του ο **Θόδωρος Πάσχος** περιγράφει ένα διδακτικό πείραμα με πρωτοετείς φοιτητές Τμήματος Μαθηματικών για την διδασκαλία βασικών θεμάτων του Απειροστικού Λογισμού, αξιοποιώντας πρωτότυπα κείμενα σχετικά με την κίνηση και την ελεύθερη πτώση των σωμάτων, τόσο του Γαλιλαίου, όσο και σημαντικών προδρόμων του κατά τον ύστερο Μεσαίωνα, όπως ο W. Heytesbury, ο N. Oresme κ.α. Τα θέματα που πραγματεύεται ο συγγραφέας και τα πρωτότυπα κείμενα που χρησιμοποιεί έχουν παίξει καθοριστικό ρόλο στην ανάπτυξη της Δυτικοευρωπαϊκής Επιστήμης, τόσο των Μαθηματικών όσο και της μέσω αυτών περιγραφής της φύσης, δηλ. της Φυσικής όπως τούτη γίνεται αντιληπτή από τον Γαλιλαίο και τον Νεύτωνα και εξής.

Μιχάλης Κούρκουλος  
Κωνσταντίνος Τζανάκης

## Βιβλιογραφία

Ο αναγνώστης μπορεί να αποκτήσει πληρέστερη εικόνα της ευρύτερης περιοχής στην οποία αναφέρονται τα άρθρα του παρόντος τεύχους μέσω της παρακάτω βιβλιογραφίας - κυρίως συλλογικών έργων - και η οποία κατά το μεγαλύτερο μέρος είναι σχετικά εύκολα προσβάσιμη και ταυτόχρονα υποβοηθητική στην αναζήτηση περισσότερων και πιο εξειδικευμένων αναφορών, τόσο πρόσφατων, όσο και προ του 2000. Η βιβλιογραφία είναι μετά το 2000 και αναφέρεται χρονολογικά.

- Fauvel, J.G., van Maanen, J. (eds) (2000) *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, New ICMI Study Series, vol.6, Kluwer Academic Publishers (2000).
- Katz V. (ed.) (2000) *Using history to teach Mathematics: An international perspective*, MAA Notes vol.51, The Mathematical Association of America, Washington DC.
- Gulikers, I., Blom K. (2001) 'A Historical Angle', A Survey of Recent Literature on the Use and Value of the History in Geometrical Education, *Educational Studies in Mathematics* 47, 223–258.
- Bekken, O., Mosvold, R. (eds) (2003) *Study the masters: the Abel-Fauvel conference*. NCM, Göteborg.
- Katz V., Michalowicz, K.D. (eds) (2004) *Historical modules for the teaching and learning of mathematics*, The Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Siu, M-K., Tzanakis, C. (eds) (2004) The role of the History of Mathematics in Mathematics Education, τεύχος-αφιέρωμα, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* special double issue, vol 3, Nos 1-2.
- Shell-Gellasch, A., Jardine D. (eds) (2005) *From calculus to computers: using the last 200 years of mathematics history in the classroom*, MAA Notes vol.68, The Mathematical Association of America, Washington, DC.
- Θωμαΐδης, Γ., Καστάνης, Ν., Τζανάκης, Κ. (επιμ.) (2006): *Ιστορία & Μαθηματική Εκπαίδευση*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Knoebel, A., Laubenbacher, R., Lodder, J., Pengelley, D. (2007) *Mathematical masterpieces –further chronicles by the explores*, Springer, New York.
- Furinghetti, F., Radford, L., Katz V. (eds) (2007): The history of Mathematics in Mathematics Education: Theory and Practice, τεύχος-αφιέρωμα, *Educational Studies in Mathematics*, vol.66 No 2
- Jankvist, U. T. (2009) A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235–261.
- Jankvist, U. T. (2009) On empirical research in the field of using history in Mathematics education, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 12(1), σελ 67-101.
- Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών (επιμ.) (2009): *Η Διδακτική Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Kjeldsen, T.H. Jankvist, U.T. (2011) New Avenues for History in Mathematics Education: Mathematical Competencies and Anchoring, *Science & Education*, 20(9), 831-862.
- Katz, V., Tzanakis, C. (eds) (2011): *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education*, MAA Notes vol.78, The Mathematical Association of America, Washington DC.

Sriraman, B. (ed) (2012) *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*, The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education, monograph vol. 12, Information Age publishing Inc., Charlotte NC.

Barbin, E., Tzanakis, C. (2014) History of Mathematics and Education in S. Lerman (ed), *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer (ISBN: 978-94-007-4977-1 Print; 978-94-007-4978-8 Online); pp.255-260 (βλ. και <http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/HistoryMath&Edu1.pdf> )

Επίσης ο αναγνώστης μπορεί να λάβει υπ' όψιν του και τα ακόλουθα:

(α) Υπάρχουν χρήσιμες πληροφορίες και υλικό στην ιστοσελίδα της *HPM Group*:

<http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/>

(β) Προγραμματίζονται για το 2016 δύο διεθνή συνέδρια:

- **13th International Congress on Mathematical Education - ICME 13**

24-31 Ιουλίου 2016, Αμβούργο, Γερμανία <http://www.icme13.org/>

Στο πλαίσιο του οποίου συμπεριλαμβάνεται και το

*Topic Study Group 25: The role of History of Mathematics in Mathematics Education*

βλ. σχετικά [http://www.icme13.org/files/tsg/TSG\\_25.pdf](http://www.icme13.org/files/tsg/TSG_25.pdf) ,

<http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/TSG25-ICME13-CallForSubmissions.pdf>

- **HPM 2016: History and Pedagogy of Mathematics - The HPM Satellite Meeting of ICME 13**

Montpellier, Γαλλία, 18-22 Ιουλίου 2016.

βλ. σχετικά [http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/HPM%C2%A02016%20First%20announcement%20\\_Final.pdf](http://www.clab.edc.uoc.gr/HPM/HPM%C2%A02016%20First%20announcement%20_Final.pdf) , <http://hpm2016.sciencesconf.org>

## Σημειώσεις

1. Μια εμπεριστατωμένη καταγραφή των ερευνητικών πορισμάτων στην περιοχή αυτή μέχρι το 2000 που έπαιξε έκτοτε καθοριστικό ρόλο στην περαιτέρω επιστημονική ανάπτυξη της περιοχής αυτής, αποτελεί ο συλλογικός τόμος J. G. Fauvel & J. van Maanen (eds), *History in Mathematics Education: The ICMI Study*, "New ICMI Study Series", vol.6, Kluwer Academic Publishers (2000).
2. Ο διεθνής αυτός οργανισμός προήλθε από μια πρόταση του D.E. Smith το 1905 στο *L'enseignement mathématique*, ιδρύθηκε το 1908 στο International Congress of Mathematicians στην Ρώμη και αναδιαρθρώθηκε το 1952, είχε δε ως πρώτο πρόεδρο τον σπουδαίο γερμανό μαθηματικό F. Klein. Σήμερα αποτελεί τον κυριότερο και μεγαλύτερο διεθνή επιστημονικό φορέα σχετικό με την Μαθηματική Εκπαίδευση με πολλές και ποικίλες σημαντικές δραστηριότητες, μεταξύ των οποίων και το ανά τετραετία *International Congress on Mathematical Education –ICME*. Το επόμενο γίνεται στο Αμβούργο 24-31/7/2016.
3. *Historia Mathematica* 5, 1978, 76. Για πληρέστερη περιγραφή της ιστορίας της ομάδας *HPM* βλ. το κείμενο των J.G. Fauvel & F. Fasanelli στο <http://www.clab.edc.uoc.gr/hpm/HPMhistory.PDF>