

ΕΠΙΔΟΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑΣ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ ΦΟΙΤΗΤΩΝ ΣΕ ΚΑΤ' ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ

Γεωργία Χαλεπάκη
Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
Διδάκτορας Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης

Abstract

This study focuses on the investigation of the performance of primary and secondary school students as well as pre-service primary school teachers at computational estimation. A test was given to 5th, 6th, 10th and 11th grade students and to students of the Department of Primary Education of the University of Crete. The results of the present study provide evidence that there is a slow development of the computational estimation ability. Up to the 10th grade no significant difference is remarked. 11th grade students have significantly better performance than 10th grade students and preservice primary school teachers have significantly better performance than 11th grade students. Participants of all age groups have better performance at multiplications than divisions and better performance at operations between integrals than operations between decimals. Besides, the correlation between the subareas of computational estimation becomes stronger at each older age group which provides evidence that computational estimation structure becomes more solid at each older age group.

Λέξεις κλειδιά

Κατ' εκτίμηση υπολογισμοί, πολλαπλασιασμοί, διαιρέσεις, ακέραιοι, δεκαδικοί, ηλικιακή διαφοροποίηση, επίδοση.

0. Εισαγωγή

Η εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μπορεί να διαδραματίσει ένα σημαντικό ρόλο στη μαθηματική εκπαίδευση καθώς συνεισφέρει στην καλύτερη κατανόηση, εκμάθηση και εφαρμογή των αλγορίθμων (Κούρκουλος & Τζανάκης, 2000) αλλά και στην καλύτερη κατανόηση των αριθμών και των ιδιοτήτων τους (Sowder, 1992). Οι Montague & Garderer (2003) αναφέρουν ότι η εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων σχετίζεται με την απόκτηση της αίσθησης του αριθμού

(number sense¹) ενώ η Mildenhall (2011) θεωρεί ότι η εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων αποτελεί δομικό στοιχείο της αίσθησης του αριθμού.

Η εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων μπορεί να γίνει από μνήμης πριν την εκτέλεση μιας πράξης, αλλά τα αποτελέσματά της χρησιμοποιούνται και κατά τη διάρκεια εκτέλεσης της πράξης για τον έλεγχο της ορθότητας της διαδικασίας που ακολουθείται. Επίσης, μετά την εκτέλεσή της μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της ορθότητας του αποτελέσματος (Κούρκουλος & Τζανάκης, 2000). Σε περίπτωση ύπαρξης σφάλματος αμέσως επόμενο βήμα είναι η εφαρμογή αυτοδιορθωτικών δραστηριοτήτων. Σε περίπτωση που ο μαθητής πραγματοποιεί τέτοιες δραστηριότητες προσπαθεί να εντοπίσει το σφάλμα και να προβεί στη διόρθωσή του. Ωστόσο, η αυτοδιόρθωση αποτελεί μια βασική μεταγνωστική δεξιότητα την οποία ο μαθητής θα πρέπει να αναπτύξει μέσα από συστηματική διδασκαλία, αφού η απόκτηση μεταγνωστικών δεξιοτήτων α) καθιστά το μαθητή ικανό για αυτό-κατευθυνόμενη μάθηση και β) καλλιεργεί στο μαθητή μια θετική στάση προς τη γνώση (Ματσαγγούρας 2000).

Επίσης, η εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων που παράγονται με αριθμομηχανή ή ηλεκτρονικό υπολογιστή (Κούρκουλος & Τζανάκης, 2000), καθώς είναι συχνό το φαινόμενο σφάλματος στην εισαγωγή των δεδομένων το οποίο οδηγεί στην παραγωγή εσφαλμένου αποτελέσματος.

Εξάλλου, η εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων μπορεί να υποκαταστήσει τον ίδιο τον αλγόριθμο σε καταστάσεις καθημερινής ζωής στις οποίες δεν χρειάζεται το πλήρες αποτέλεσμα αλλά μια εκτίμηση του αποτελέσματος. Σ' αυτές τις περιπτώσεις η εκτίμηση του αποτελέσματος πλεονεκτεί σημαντικά καθώς δίνει συνήθως ταχύτερα αποτελέσματα απ' ό,τι η χρήση χαρτιού και μολυβιού ή ακόμα και αριθμομηχανής, όταν υπάρχει η κατάλληλη εξάσκηση. Επίσης, είναι σημαντικό ότι δεν απαιτείται υλικό υποστήριγμα και συνεπώς μπορεί με ευκολία να εφαρμοστεί σε περιπτώσεις που δε διαθέτουμε χαρτί και μολύβι ή αριθμομηχανή, όπως λόγου χάρι όταν θέλουμε να εκτιμήσουμε το κόστος διαφόρων αγαθών σε σούπερ μάρκετ και να πάρουμε την απόφαση αν τα χρήματα που διαθέτουμε είναι επαρκή για την αγορά τους (Λεμονίδης, 2013).

1. Ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων

Λιγότερες έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί οι οποίες αφορούν στην ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων. Η Dowker (1997) διερεύνησε τις δυνατότητες 215 μαθητών ηλικίας 5 έως 9 ετών τους οποίους ταξινόμησε σε τέσσερα επίπεδα ανάλογα με την επίδοσή τους σε προσθετικά προβλήματα εκτίμησης τα οποία ήταν λίγο δυσκολότερα σε σχέση με το επίπεδό τους. Τα

παιδιά του πρώτου επιπέδου είχαν πολύ χειρότερη επίδοση από τα παιδιά υψηλότερων επιπέδων, παρόλο που τα προβλήματα που τους δόθηκαν ήταν αρκετά ευκολότερα. Τα αποτελέσματα της έρευνας καταδεικνύουν ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν κατάλληλες στρατηγικές για τα προβλήματα εκτίμησης, ελαφρά ανώτερες από το επίπεδό τους, αλλά όχι σε πιο δύσκολα προβλήματα, γεγονός το οποίο η Dowker ερμήνευσε λέγοντας ότι τα πολύ δύσκολα προβλήματα αποθαρρύνουν τα παιδιά, οδηγώντας τα σε ανόητο μάντεμα.

Οι Sowder & Wheeler (1987) έδωσαν προβλήματα εκτίμησης σε μαθητές επιπέδου 2, 4, 6, 8 και 10 και παρατήρησαν ότι η ικανότητα για να επιλύσουν τα προβλήματα αύξανε ανάλογα με το επίπεδο. Ακολούθησαν συνεντεύξεις σε 4 μαθητές από καθένα επίπεδο, οι οποίες έδειξαν ότι πριν το 6^ο επίπεδο οι μαθητές είχαν πολύ λίγες ικανότητες για εκτίμηση και σπάνια κατανοούσαν τι έπρεπε να κάνουν για να λύσουν ένα πρόβλημα εκτίμησης. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας οι Sowder και Wheeler διαπίστωσαν ότι οι έννοιες και οι στρατηγικές εκτίμησης των αποτελεσμάτων των πράξεων ακολουθούν αργή ανάπτυξη, καθώς και ότι η εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων είναι μια σύνθετη διαδικασία.

Σε μια επόμενη ερευνά τους οι Sowder & Wheeler (1989) επιχείρησαν να προσδιορίσουν την ανάπτυξη και κατανόηση των εννοιών και διαδικασιών που συνδέονται άμεσα με την εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων. Σε 12 μαθητές 3^{ου}, 5^{ου}, 7^{ου}, 9^{ου} επιπέδου (12 από κάθε επίπεδο), μέσης ικανότητας στα μαθηματικά, δόθηκαν προβλήματα εκτίμησης υπολογισμών με λύσεις από υποθετικούς μαθητές, καθώς και παρόμοια προβλήματα στα οποία οι ίδιοι καλούνταν να κάνουν εκτίμηση του αποτελέσματος. Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η διαδικασία πρώτα να βρίσκεις την προσέγγιση και μετά να υπολογίζεις φάνηκε ότι αναπτύσσεται από το 7^ο επίπεδο και μετά, όπως επίσης και η αποδοχή πολλαπλών λύσεων καθώς και η ικανότητα για εύρεση της προσέγγισης των αριθμών. Εξάλλου, η σημασία της αντιστάθμισης² για την επίτευξη καλύτερων εκτιμήσεων αναγνωρίζεται από τους μαθητές των υψηλότερων επιπέδων, ενώ μόνο στο 9^ο επίπεδο οι μαθητές επιχειρούν να τη χρησιμοποιήσουν κατά τη διαδικασία εκτίμησης.

Οι Case & Sowder (1990) προσπάθησαν να αναλύσουν την εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μεταξύ δύο ποιοτικά διαφορετικών στοιχείων που σχετίζονται με την εκτίμηση: τη μετατροπή των ακριβών αριθμών σε κατά προσέγγιση αριθμούς και τον (νοερό) υπολογισμό αυτών των αριθμών. Βασίστηκαν στη θεωρία του Case (1985) για τη γνωστική ανάπτυξη, σύμφωνα με την οποία η γνωστική ανάπτυξη κατά την διάρκεια των σχολικών χρόνων περνά από δύο βασικά στάδια, καθένα από τα οποία έχει τρία υποστάδια. Το πρώτο είναι το στάδιο της διάστασης (dimensional stage) από 5 έως 10 ετών κατά τη διάρκεια του οποίου τα παιδιά μπορούν να εστιάζουν σε ένα μόνο στοιχείο που έχει μια ή περισσότερες διαστάσεις. Το δεύτερο στάδιο είναι το διανυσματικό (vectorial stage) από 11 έως 18 ετών, κατά τη

διάρκεια του οποίου τα παιδιά μπορούν να εστιάσουν σε δύο ή περισσότερα στοιχεία μιας δραστηριότητας. Καθώς λοιπόν η εκτίμηση περιέχει δύο σύνθετα, πολυδιάστατα στοιχεία, την εύρεση μιας προσέγγισης των αριθμητικών δεδομένων και το νοερό υπολογισμό των αναδιατυπωμένων αριθμητικών δεδομένων, θεωρητικά σύμφωνα με τους ερευνητές ανήκει σε επίπεδο στο οποίο τα παιδιά βρίσκονται στο διανυσματικό στάδιο της γνωστικής ανάπτυξης. Δόθηκαν κατάλληλα προβλήματα για κάθε υποστάδιο των δύο βασικών σταδίων που προαναφέρθηκαν σε 12 μαθητές επιπέδου k , 2, 4, 7, 9 και $11/12$, καθώς και προβλήματα του επόμενου υποσταδίου. Οι προβλέψεις των ερευνητών για την επιτυχία της πλειοψηφίας των μαθητών στα προβλήματα εκτίμησης που αντιστοιχούσαν στο υποστάδιο στο οποίο βρίσκονταν ήταν απόλυτα ακριβείς. Ακριβείς επίσης ήταν και οι προβλέψεις τους για την αποτυχία της πλειοψηφίας των μαθητών σε προβλήματα που αντιστοιχούσαν σε υποστάδιο επόμενο απ' αυτό το οποίο ήδη διένυαν. Με βάση τα πορίσματα της έρευνας οι ερευνητές προτείνουν ότι δεν θα πρέπει να υπάρχει βιασύνη στη διδασκαλία διαδικασιών εκτίμησης, αλλά να ακολουθείται η πορεία γνωστικής εξέλιξης. Επίσης, θα πρέπει να γίνεται εκμετάλλευση της φυσικής ανάπτυξης τέτοιων ικανοτήτων, ώστε αυτές να ισχυροποιούνται και να επεκτείνονται στο πλαίσιο μιας οργανωμένης διδασκαλίας, όπως άλλωστε υποστηρίζει και ο Λεμονίδης (2013).

Οι LeFevre et.al (1993) πραγματοποίησαν έρευνα σε 21, 18 και 17 μαθητές 4^{ου}, 6^{ου}, 8^{ου} επιπέδου αντίστοιχα και σε 20 ενήλικες δίνοντας τους ένα τεστ με προβλήματα πολλαπλασιασμού προκειμένου να εκτιμήσουν το γινόμενο. Τα προβλήματα διέφεραν ως προς τον αριθμό των ψηφίων: 1×2 (π.χ. 8×18), 1×3 (π.χ. 5×144), 2×2 (π.χ. 22×91) και 2×3 (π.χ. 45×164). Πολύ λίγοι μαθητές 4^{ου} επιπέδου μπορούσαν να εκτιμήσουν. Οι περισσότεροι μαθητές 6^{ου} και 8^{ου} επιπέδου έδιναν λογικές απαντήσεις. Η επίδοση στην εκτίμηση αυξανόταν ανάλογα με την ηλικία και οι ενήλικες έδιναν πιο ακριβείς απαντήσεις σε σχέση με τους μαθητές, αλλά οι πιο σημαντικές αναπτυξιακές αλλαγές αφορούσαν στην εννοιολογική γνώση που χρησιμοποιείται για την εφαρμογή της διαδικασίας εκτίμησης. Από το 6^ο επίπεδο οι μαθητές φαίνεται να μπορούν να εφαρμόζουν στρογγυλοποίηση για να κάνουν λογικές εκτιμήσεις. Μόνο οι ενήλικες φαίνεται να κατανοούν την αρχή της προσέγγισης κατανοώντας ότι είναι σημαντικό η εκτίμηση να είναι κοντά στην ακριβή απάντηση. Οι ενήλικες έδιναν ακριβείς απαντήσεις σε απλά προβλήματα και προσάρμοζαν τις αρχικές εκτιμήσεις τους στην ακριβή απάντηση (αντιστάθμιση).

Η Volcova (2005) προσπάθησε να αναπτύξει ένα πλαίσιο για να περιγράψει τη σκέψη των μαθητών σε καταστάσεις που περιλαμβάνουν εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων. Ως μεθοδολογία χρησιμοποίησε τη μελέτη περίπτωσης λαμβάνοντας ως δείγμα 8 μαθητές 8^{ου} επιπέδου. Όλοι οι μαθητές που είχαν επιλεγεί ήταν οι καλύτεροι στα Μαθηματικά στην τάξη τους, με την υπόθεση ότι οι πολύ καλοί μαθητές αναμενόταν να επιδείξουν μεγάλη ποικιλία τεχνικών και στρατηγικών

στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων. Πραγματοποιήθηκε συνέντευξη σ' αυτούς τους μαθητές με τη χρήση ενός πρωτοκόλλου που αποτελούνταν από 19 ασκήσεις με ακέραιους αριθμούς, κλάσματα, ποσοστά και δεκαδικά κλάσματα, ενώ δεν επιτρέπονταν η χρήση χαρτιού και μολυβιού. Ανάλογα με τη συνθετότητα των στρατηγικών που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, οι απαντήσεις τους ταξινομήθηκαν σε 4 κατηγορίες που συνιστούν και 4 επίπεδα ιεραρχημένα ανάπτυξης: το προδιαστατικό (predimensional), το μονοδιαστατικό (unidimensional), το διδιαστατικό (bidimensional) και το ολοκληρωμένο διδιαστατικό (intergrated bidimensional).

Με βάση τις προαναφερθείσες έρευνες παρατηρούμε ότι, όσον αφορά στην ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων, αρκετές έρευνες διαπιστώνουν την αργή ανάπτυξή της καθώς και την πολυπλοκότητα και πολυσυνθετότητα της διαδικασίας της εκτίμησης (Sowder & Wheeler, 1987, 1989, LeFevre et.al, 1993), ενώ γίνεται προσπάθεια να οριοθετηθούν επίπεδα ανάπτυξης της ικανότητας αυτής (Case & Wheeler, 1990, Dowker, 1997, Volcova, 2005). Επίσης, συγκλίνουν στο γεγονός ότι η ικανότητα εκτίμησης των αποτελεσμάτων των πράξεων αναπτύσσεται μετά την ηλικία των 12 ετών. Οι Case & Sowder (1990) και ο Λεμονιδής (2013) τονίζουν τη σημασία μιας οργανωμένης διδασκαλίας για την ισχυροποίηση της φυσικής ικανότητας για εκτίμηση.

Λαμβάνοντας υπόψη την υπάρχουσα βιβλιογραφία, διαπιστώνουμε ότι η ανάπτυξη της ικανότητας για εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων έχει διερευνηθεί από μικρό αριθμό ερευνών. Επίσης, οι έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί ελέγχουν πολύ μικρό αριθμό δείγματος, οι περισσότερες χρησιμοποιούν πολύ περιορισμένο αριθμό και είδος ερωτημάτων σε σχέση με την εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων ενώ μόνο οι LeFevre et.al (2003) εξετάζουν και ενήλικες. Δεν εξετάζεται σε διευρυμένο δείγμα διάφορων ηλικιακών ομάδων με μεγάλο εύρος ερωτημάτων που αφορούν στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων η εξέλιξη της επίδοσης στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων.

2. Επίδοση μαθητών και ενηλίκων στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων

Αρκετές έρευνες έχουν πραγματοποιηθεί σε διεθνές επίπεδο οι οποίες εξετάζουν την επίδοση στην επίδοση στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων. Ωστόσο, οι έρευνες αυτές εστιάζουν σε περιορισμένο ηλικιακό εύρος και αφορούν είτε στην επίδοση μαθητών (ενότητα 2.1) είτε στην επίδοση ενηλίκων (ενότητα 2.2).

2.1. Επίδοση μαθητών

Οι Reys et.al (1991a) μελέτησαν την επίδοση και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν μαθητές 5^{ου} και 8^{ου} επιπέδου στο Μεξικό. Σε δείγμα 255 μαθητών 5^{ου} επιπέδου και 177 μαθητών 8^{ου} επιπέδου έδωσαν τεστ με 38 ερωτήματα. Τα ερωτήματα εμφανί-

ζονταν σε πίνακα με τη βοήθεια προβολέα για 12-15 δευτερόλεπτα. Υπήρχαν ερωτήματα χωρίς συγκεκριμένο αλλά και με συγκεκριμένο. Στους μαθητές 5^{ου} επιπέδου ο μέσος όρος συνολικού σκορ (και στα 38 ερωτήματα) είναι 1,1 (τυπική απόκλιση: 1,5) και στους μαθητές 8^{ου} επιπέδου είναι 4 (τυπική απόκλιση: 3,2).

Οι Reys et.al (1991b) εξέτασαν την επίδοση και τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν μαθητές 5^{ου} και 8^{ου} επιπέδου στην Ιαπωνία. Το δείγμα αποτελούνταν από 279 μαθητές 5^{ου} επιπέδου και 187 μαθητές 8^{ου} επιπέδου. Το τεστ περιείχε 39 ερωτήματα εκτίμησης των αποτελεσμάτων των πράξεων (25 χωρίς συγκεκριμένο και 14 με συγκεκριμένο) τα οποία προβάλλονταν σε οθόνη για 10-15 δευτερόλεπτα. Ο μέσος όρος για τους μαθητές 5^{ου} επιπέδου ήταν 7,42 (τυπική απόκλιση: 5,16) και για τους μαθητές 8^{ου} επιπέδου ήταν 11,18 (τυπική απόκλιση: 5,71).

Ο Rubinstein (1985) μελέτησε τις σχετικές με την εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων ικανότητες και έδωσε τεστ σε 309 μαθητές 8^{ου} επιπέδου. Το τεστ περιείχε 64 ερωτήματα: α) 16 ανοιχτά ερωτήματα, β) 16 ερωτήματα λογικότητας ενός αποτελέσματος, γ) 16 ερωτήματα του τύπου: “η διαφορά 55,65-26,95 είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη από 20”, δ) 16 ερωτήματα πολλαπλής επιλογής που ελέγχουν την τάξη μεγέθους. Ο μέσος όρος και οι τυπική απόκλιση σε καθεμιά από τις τέσσερις αυτές περιοχές ήταν αντίστοιχα: α) Μ.Ο. 7,62 (τυπική απόκλιση 3,62), β) Μ.Ο. 9,75 (τυπική απόκλιση 2,62), γ) Μ.Ο. 11,31 (τυπική απόκλιση 2,83), δ) Μ.Ο. 12,1 (τυπική απόκλιση 3,18). Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας, η εκτίμηση όταν τα αριθμητικά δεδομένα είναι δεκαδικό αριθμοί αποδείχθηκε δυσκολότερη από τους ακεραίους.

Οι Tsao & Pan (2010) μελέτησαν την επίδοση 235 μαθητών 5^{ου} επιπέδου στην Taiwan δίνοντας τους τεστ με 28 ερωτήματα με ακεραίους, δεκαδικούς και κλάσματα. Ο μέσος όρος σωστά απαντημένων ερωτημάτων των μαθητών ήταν 16,37 ενώ το ποσοστό των σωστών απαντήσεων ήταν 58,48%. Η επίδοση των μαθητών στα κλάσματα και στους δεκαδικούς ήταν χαμηλότερη σε σχέση με την επίδοση στους ακεραίους.

Οι Λεμονίδης & Νόλκα (2013) πραγματοποίησαν έρευνα σε 596 μαθητές Ε' και Στ' Δημοτικού προκειμένου να διερευνήσουν τις συμπεριφορές τους σε προβλήματα κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Οι μαθητές που συμμετείχαν στην έρευνα είχαν επιλεγεί από τους δασκάλους τους λόγω των καλών τους επιδόσεων στα Μαθηματικά. Οι μαθητές εξετάστηκαν γραπτά σε 4 θέματα, 1 από τα οποία περιείχε 2 προβλήματα εκτίμησης (τα άλλα 3 θέματα ήταν λεκτικά προβλήματα). Τα ποσοστά επιτυχίας με χρήση εκτίμησης στα 2 προβλήματα εκτίμησης για την Ε' τάξη είναι 28,3% για το πρόβλημα $1/2 + 3/8$ και 22,3% για το πρόβλημα 28×56 ενώ για την Στ' τάξη είναι 34,4% για το πρόβλημα $9,84\%$ του 816 και 48,6% για το πρόβλημα $1,26 + 4,79 + 0,99 + 1,37 + 2,58$. Οι συγγραφείς διαπιστώνουν ότι οι μαθητές έχουν χαμηλή επίδοση σε προβλήματα εκτίμησης των αποτελεσμάτων των πράξεων, παρά

το γεγονός ότι πρόκειται για μαθητές με καλές επιδόσεις στο μάθημα των Μαθηματικών. Διαπιστώνουν επίσης τη συσχέτιση της ικανότητας κατ' εκτίμηση υπολογισμού με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος.

2.2. Επίδοση ενηλίκων

Οι Bestgen et.al (1980) εξετάζοντας τις ικανότητες των φοιτητών εκπαίδευσης έδωσαν τεστ σε 187 φοιτητές το οποίο περιείχε 60 ανοιχτά ερωτήματα χωρίς συγκείμενο με ακεραίους και δεκαδικούς. Ο μέσος όρος σε κάθε περιοχή ερωτημάτων είναι: α) προσθέσεις (17 ερωτήματα) Μ.Ο. 5,8 β) αφαιρέσεις (13 ερωτήματα) Μ.Ο. 4,5 γ) Πολλαπλασιασμοί (15 ερωτήματα) Μ.Ο. 1,7) και δ) διαιρέσεις (15 ερωτήματα) Μ.Ο. 2,8. Στα 64 ερωτήματα ο μέσος όρος επιτυχίας είναι 14,8. Από τα αποτελέσματα της έρευνας φάνηκε ότι η επίδοσή τους ήταν καλύτερη σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης σε σχέση με προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης και επίσης καλύτερη σε προβλήματα με ακέραιους σε σχέση με προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς (όπως και στην έρευνα του Rubinstein, 1985).

Ο Gliner (1991) μελετώντας τους παράγοντες που συνεισφέρουν στην επιτυχία στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων έδωσε τεστ με 25 ερωτήματα σε 141 φοιτητές εκπαίδευσης. Ο μέσος όρος επιτυχίας ήταν 14,17 (τυπική απόκλιση: 4,51).

Οι Lemonidis & Kaimakami (2013) πραγματοποίησαν έρευνα σε 50 υποψήφιους δασκάλους προκειμένου να διερευνήσουν τις γνώσεις τους στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς. Η εξέταση έγινε με προσωπική συνέντευξη σε 15 προβλήματα ενώ χρονομετρήθηκε και ο χρόνος απάντησης. Οι μελλοντικοί δάσκαλοι εμφανίζουν χαμηλή επίδοση (π.χ. το ποσοστό επιτυχίας για το πρόβλημα “εκτιμήστε περίπου το ακόλουθο αποτέλεσμα: 62×79 ” είναι 52% ενώ μόνο το 44% χρησιμοποιεί τη διαδικασία της εκτίμησης και δεν καταφεύγει στον ακριβή αλγοριθμικό υπολογισμό). Οι συγγραφείς της έρευνας καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι αιτίες για τις δυσκολίες των φοιτητών στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς είναι: α) η γενική τους αδυναμία στους νοερούς υπολογισμούς και β) το γεγονός ότι δεν γνώριζαν και δεν ήταν εξασκημένοι σε στρατηγικές εκτίμησης. Επίσης, συμπεραίνουν ότι οι παράγοντες που επηρεάζουν τη δυσκολία ενός προβλήματος που απαιτεί κατ' εκτίμηση υπολογισμό είναι: α) το είδος της πράξης που εμπριέχει το πρόβλημα (οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις είναι πιο δύσκολες πράξεις από τις προσθέσεις), β) τα χαρακτηριστικά των αριθμών της πράξης (το μέγεθος των αριθμών, το πλήθος των όρων της πράξης, το είδος των αριθμών) και γ) το περιεχόμενο της εκφώνησης του προβλήματος (αν π.χ. είναι οικείο).

Οι Lemonidis et.al (2014) εξέτασαν την επίδοση 80 Ελλήνων δασκάλων στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων. Δόθηκε ένα τεστ με 10 προβλήματα. Οι συγγραφείς, με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας επισημαίνουν ότι οι εν ενεργεία

δάσκαλοι δεν έχουν εξαιρετική επίδοση σε προβλήματα εκτίμησης των αποτελεσμάτων των πράξεων, παρόλο που οφείλουν να διδάσκουν τέτοια προβλήματα στις τάξεις τους (π.χ. στο πρόβλημα “Ένας εργάτης δούλεψε 28 ημέρες για 56 τη μέρα. Πόσο περίπου θα πληρωθεί;” το ποσοστό επιτυχίας με χρήση εκτίμησης είναι 67,5% ενώ το 2,5% βρίσκει την ακριβή απάντηση με χρήση αλγορίθμου). Οι μεγαλύτερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν είναι σε προβλήματα με πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις, καθώς και με κλάσματα.

Με βάση τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών διαπιστώνουμε ότι τόσο η επίδοση των μαθητών, όσο και η επίδοση των ενηλίκων στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων είναι πολύ χαμηλή, παρά την προσπάθεια για ενσωμάτωση των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών στα αναλυτικά προγράμματα σε διεθνές επίπεδο. Επίσης, μαθητές και ενήλικες εμφανίζουν χαμηλότερη επίδοση σε κατ’ εκτίμηση πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις σε σχέση με κατ’ εκτίμηση προσθέσεις και αφαιρέσεις (Lemonidis & kaimakami, 2013, Lemonidis et.al, 2014), ενώ μεγαλύτερες δυσκολίες αντιμετωπίζουν στην εκτίμηση πράξεων με δεκαδικούς σε σχέση με τους ακεραίους και ακόμα μεγαλύτερες δυσκολίες στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων μεταξύ κλασμάτων (Tsao & Pan, 2011, Lemonidis et.al, 2014).

Παρόλο που οι παραπάνω έρευνες δίνουν στοιχεία για την επίδοση μαθητών και ενηλίκων στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων και επισημαίνουν το έλλειμμα που παρατηρείται όσον αφορά στο συγκεκριμένο θέμα, ωστόσο δεν εξετάζεται: α) η διαφοροποίηση της επίδοσης στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων ανάλογα με την ηλικία, β) η σχέση μεταξύ των διάφορων υποπεριοχών της εκτίμησης των αποτελεσμάτων των πράξεων (π.χ. σχέση μεταξύ εκτίμησης πολλαπλασιασμών και εκτίμησης διαιρέσεων ακεραίων) και γ) η διαμόρφωση αυτής της σχέσης ανάλογα με την ηλικία.

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω διαπιστώσεις σχεδιάσαμε και πραγματοποιήσαμε έρευνα με σκοπό να συνεισφέρουμε στην παροχή στοιχείων σχετικά με την επίδοση μαθητών και ενηλίκων στην εκτίμηση των αποτελεσμάτων των πράξεων.

Η εμπειρική έρευνα που πραγματοποιήσαμε έχει σκοπό να δώσει στοιχεία απαντήσεων στα παρακάτω διερευνητικά ερωτήματα:

- πώς διαφοροποιείται η επίδοση στην εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων ανάλογα με την ηλικία;
- ποια είναι η σχέση μεταξύ της επίδοσης σε διάφορες υποπεριοχές των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών;
- πώς διαμορφώνεται η σχέση μεταξύ της επίδοσης σε διάφορες υποπεριοχές των κατ’ εκτίμηση υπολογισμών ανάλογα με την ηλικία;

3. Μεθοδολογία

3.1. Συμμετέχοντες

Προκειμένου να επιτευχθεί ο σκοπός της έρευνας, δόθηκε τεστ σε μαθητές Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης καθώς και σε φοιτητές Π.Τ.Δ.Ε. Επιλέξαμε να δώσουμε το τεστ σε μαθητές οι οποίοι βρίσκονται στο τέλος του Δημοτικού Σχολείου, σε μαθητές οι οποίοι μόλις έχουν τελειώσει την Υποχρεωτική Εκπαίδευση και σε μαθητές οι οποίοι βρίσκονται στο τέλος της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης. Έτσι, το τεστ δόθηκε σε μαθητές που τελειώνουν την Ε' και Στ' Δημοτικού³, σε μαθητές που μόλις έχουν ξεκινήσει την Α' Λυκείου (θεωρώντας ότι οι μαθητές αυτοί έχουν μόλις τελειώσει την υποχρεωτική εκπαίδευση) και σε μαθητές οι οποίοι τελειώνουν τη Β' Λυκείου⁴. Επίσης, το τεστ δόθηκε σε φοιτητές Π.Τ.Δ.Ε. εκπροσωπώντας μια ομάδα ενηλίκων οι οποίοι επιπροσθέτως είναι μελλοντικοί δάσκαλοι και θα κληθούν να διδάξουν την εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων στους μαθητές σύμφωνα με το ισχύον αναλυτικό πρόγραμμα. Το τεστ δόθηκε σε ολόκληρα τμήματα σχολείων του Ηρακλείου ίδιας περίπου οργανικότητας (12/θέσια και άνω) τα οποία ανήκουν σε μέσες αστικές περιοχές, μη προνομιούχες αλλά και μη προβληματικές, με μαθητικό δυναμικό που κυμαίνονταν από 15 έως 23 μαθητές ανά τμήμα για τα Δημοτικά και 21-27 μαθητές ανά τμήμα για τα Λύκεια. Έτσι, το δείγμα της έρευνας αποτέλεσαν 304 μαθητές Ε' Δημοτικού, 329 μαθητές Στ' Δημοτικού, 252 μαθητές Α' Λυκείου, 261 μαθητές Β' Λυκείου από σχολεία του Ηρακλείου και 244 φοιτητές Β' εξαμήνου του Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης. Το τεστ δόθηκε στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος για τους μαθητές και στο πλαίσιο παρακολούθησης μαθήματος μαθηματικού περιεχομένου για τους φοιτητές.

3.2. Όργανα και διαδικασία

Το τεστ που διαμορφώθηκε περιείχε ερωτήματα που αφορούσαν σε κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις ακεραίων και δεκαδικών. Επιλέχθηκαν τυπικά ερωτήματα που αντιπροσωπεύουν τις περιοχές αυτές, ενώ δόθηκαν μόνο ερωτήματα πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων καθώς θεωρούνται δυσκολότερες πράξεις σύμφωνα με τη βιβλιογραφία (βλ. ενότητες 2.1 και 2.2). Δόθηκαν 2 θέματα. Το 1^ο θέμα περιείχε 9 ερωτήματα πολλαπλής επιλογής στα οποία έπρεπε να εκτιμήσουν τη σωστή τάξη μεγέθους του αποτελέσματος τοποθετώντας το ανάμεσα στις κατάλληλες δυνάμεις του 10. Το 2^ο θέμα περιείχε 7 ανοιχτά ερωτήματα στα οποία έπρεπε να εκτιμήσουν το αποτέλεσμα. Στους μαθητές Α' και Β' Λυκείου καθώς και στους φοιτητές δόθηκαν δύο επιπλέον ανοιχτά ερωτήματα που αφορούσαν στην εκτίμηση διαιρέσεων δεκαδικών⁵. Τα θέματα που δόθηκαν με τα επιμέρους ερωτήματα είναι τα εξής:

1^ο θέμα: Να βρείτε με το μυαλό ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκονται τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων και να βάλετε σταυρό στο κατάλληλο τετραγωνάκι⁶:

	Πολλαπλασιασμοί			Διαιρέσεις	
Ακέραιοι	57•83	3745•5321	289•574	17531:423	6143:28
Δεκαδικοί	9,24•0,27	0,092•0,035		4,37:235	0,035:48,32

2^ο θέμα: Να υπολογίσετε με το μυαλό πόσο περίπου κάνουν τα αποτελέσματα των παρακάτω πράξεων (Π.χ. 23•11 περίπου: 200):

	Πολλαπλασιασμοί			Διαιρέσεις	
Ακέραιοι	62•73	4832•876	2181•1485	67952:317	26472:43
Δεκαδικοί	8,32•0,26	0,45•0,071		3,4:512 ⁷	0,26:17,12

Οι συμμετέχοντες είχαν περίπου 25 λεπτά στη διάθεσή τους να συμπληρώσουν το τεστ.

4. Αποτελέσματα

4.1. Σύγκριση των διάφορων ηλικιακών ομάδων ως προς την επίδοσή τους στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο μέσος όρος⁸ και η τυπική απόκλιση της επίδοσης κάθε ηλικιακής ομάδας στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς.

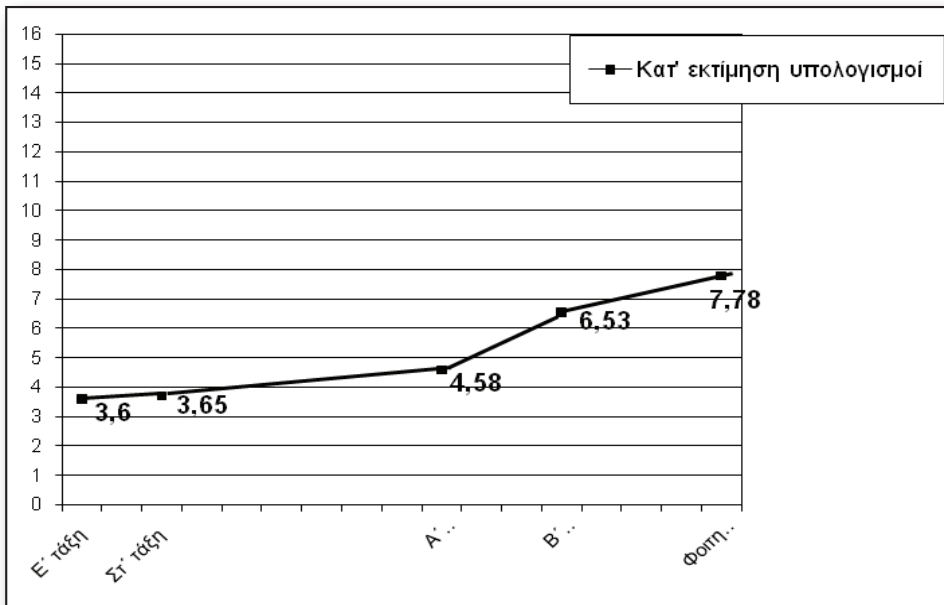
Πίνακας 1: Μέσος όρος και τυπική απόκλιση της επίδοσης όλων των ηλικιακών ομάδων στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς

Ηλικιακή ομάδα	Κατ' εκτίμηση υπολογισμοί (16 ερωτήματα)		Κατ' εκτίμηση υπολογισμοί (18 ερωτήματα)	
	Μ.Ο.	Τυπική απόκλιση	Μ.Ο.	Τυπική απόκλιση
Ε' Δημοτικού	3,6	2,7		
ΣΤ' Δημοτικού	3,65	2,77		
Α' Λυκείου	4,58	3,15	4,86	3,37
Β' Λυκείου	6,53	3,88	7,08	4,33
Φοιτητές	7,78	4,56	8,46	5,02

Παρατηρούμε ότι στους κατ' εκτίμηση η μεγαλύτερη αύξηση του μέσου όρου εμφανίζεται στη Β' Λυκείου. Αύξηση του μέσου όρου παρατηρείται και στους φοιτητές. Ωστόσο, οι φοιτητές αποτελούν μια ιδιαίτερη ομάδα αφού πρόκειται για προϊόν διαλογής, καθώς η βάση εισαγωγής στο Π.Τ.Δ.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης το 2009 και 2010, οπότε εισήχθησαν στη σχολή, ήταν αρκετά υψηλή και επομένως ήταν πιθανότατα αρκετά καλοί μαθητές. Έτσι η σύγκριση με τη Β' Λυκείου είναι ενδεικτική και τα συμπεράσματα αφορούν στη συγκεκριμένη ομάδα ενηλίκων και σε καμία περίπτωση δεν είναι γενικεύσιμα. Μικρή αύξηση του μέσου όρου παρατηρείται στην Α' Λυκείου, η οποία ωστόσο συντελείται σε χρονικό διάστημα 3,5 ετών.

Στο παρακάτω γράφημα φαίνεται πώς εξελίσσεται η επίδοση των μαθητών στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς:

Γράφημα 1: Εξέλιξη της επίδοσης στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς



Παρατηρούμε ότι στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς μέχρι την Α' Λυκείου δεν παρατηρείται αξιολογη μεταβολή του μέσου όρου, ενώ αισθητά μεγαλύτερη αύξηση του μέσου όρου επίδοσης εμφανίζεται στη Β' Λυκείου αλλά και στους φοιτητές.

Συνολικά στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς (χωρίς τα 2 ερωτήματα που δόθηκαν επιπλέον στην Α' και Β' Λυκείου και στους φοιτητές) σύμφωνα με το t-test για τη σύγκριση των μέσων όρων επίδοσης των διάφορων ηλικιακών ομάδων ανά δύο έχουμε:

Πίνακας 2: Σύγκριση της επίδοσης των διάφορων ηλικιακών ομάδων στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς

Κατ' εκτίμηση υπολογισμοί (16 ερωτήματα)		Μ.Ο.	Τυπική απόκλιση	t	p ⁹
Ε' Δημοτικού- Στ' Δημοτικού	Ε' Δημοτικού	3,6	2,698	-0,223	0,824
	Στ' Δημοτικού	3,65	2,768		
Στ' Δημοτικού- Α' Λυκείου	Στ' Δημοτικού	3,65	2,768	-3,777	<0,001
	Α' Λυκείου	4,58	4,4		
Α' Λυκείου- Β' Λυκείου	Α' Λυκείου	4,58	4,4	-6,261	<0,001
	Β' Λυκείου	6,53	3,88		
Β' Λυκείου- Φοιτητές	Β' Λυκείου	6,53	3,88	-3,318	0,001
	Φοιτητές	7,78	4,56		

Έτσι, με βάση το μέσο όρο επίδοσης στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς παρατηρούμε ότι η Στ' τάξη δεν διαφοροποιείται ως προς την επίδοση από την Ε' τάξη. Καλύτερη επίδοση έχουν οι μαθητές της Α' Λυκείου, ακόμα καλύτερη επίδοση έχουν οι μαθητές της Β' Λυκείου και ακόμα καλύτερη οι φοιτητές.

4.2. Σύγκριση της επίδοσης των διάφορων ηλικιακών ομάδων στις διάφορες υποπεριοχές των κατ' εκτίμηση υπολογισμών

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται η σύγκριση των μέσων όρων επίδοσης των διάφορων ηλικιακών ομάδων στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς και στις διάφορες υποπεριοχές της περιοχής αυτής σύμφωνα με την εφαρμογή του t-test. Συμπληρωματικά με τις πληροφορίες που παίρνουμε από τους δείκτες κεντρικής τάσης, για τη διευκόλυνση της κατανόησης των αποτελεσμάτων δίνουμε και το ποσοστό των "επιτυχόντων" σε κάθε υποπεριοχή. Ως "επιτυχόντες" σε μια υποπεριοχή θεωρούμε τους μαθητές και τους φοιτητές που αποτυγχάνουν το πολύ σε ένα ερώτημα της υποπεριοχής αυτής. Δηλαδή δίνουμε το ποσοστό αυτών που απάντησαν σε 5 ή 6 από τα 6 ερωτήματα που τέθηκαν στους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς ακεραίων, σε 3 ή 4 από τα 4 ερωτήματα στους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς δεκαδικών, σε 3 ή 4 από τα 4 ερωτήματα στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων, σε 1 ή 2 από τα 2 ερωτήματα στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (και σε 3 ή 4 από τα 4 ερωτήματα στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών για την Α' και Β' Λυκείου και για τους φοιτητές).

Πίνακας 3: Σύγκριση της επίδοσης των διάφορων ηλικιακών ομάδων στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς και στις διάφορες υποπεριοχές της περιοχής αυτής¹⁰

Περιοχή	Ηλικιακή ομάδα	Μ.Ο.	Τυπική απόκλιση	Ποσοστό επιτυχόντων ¹¹	t	p
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασια- σμοί ακεραίων (6 ερωτήματα)	Ε' Δημοτ.	1,85	1,66	10,2%		
	Στ' Δημοτ.	2,11	1,74	12,5%	-1,903	0,057
	Α' Λυκείου	2,22	1,72	12,7%	-0,752	0,452
	Β' Λυκείου	3,1	1,88	26,1%	-5,529	<0,001
	Φοιτητές	3,6	1,93	41,4%	-2,99	0,003
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασια- σμοί δεκαδικών (4 ερωτήματα)	Ε' Δημοτ.	0,76	0,92	5%		
	Στ' Δημοτ.	0,76	0,97	6,4%	-0,044	0,965 ¹²
	Α' Λυκείου	0,81	0,96	7,1%	-0,564	0,573
	Β' Λυκείου	1,26	1,22	17,6%	-4,659	<0,001
	Φοιτητές	1,48	1,33	25,8%	-1,958	0,05
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων (4 ερωτήματα)	Ε' Δημοτ.	0,71	0,92	5,6%		
	Στ' Δημοτ.	0,78	1	7,9%	-0,965	0,335
	Α' Λυκείου	1,19	1,24	17,5%	-4,231	<0,001
	Β' Λυκείου	1,71	1,38	31,8%	-4,504	<0,001
	Φοιτητές	2	1,49	41%	-2,314	0,021
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (2 ερωτήματα)	Ε' Δημοτ.	0,29	0,51	28,6%		
	Στ' Δημοτ.	0,31	0,53	28,2%	-0,653	0,514
	Α' Λυκείου	0,37	0,59	31%	-1,182	0,238 ¹³
	Β' Λυκείου	0,47	0,67	36,8%	-1,78	0,079
	Φοιτητές	0,7	0,8	48,8%	-3,491	<0,001
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών	Α' Λυκείου	0,65	0,85	3,6%		
	Β' Λυκείου	1,02	1,13	10%	-4,247	<0,001
	Φοιτητές	1,38	1,25	21,7%	-3,37	0,001

Παρατηρούμε ότι η Ε' με την Στ' Δημοτικού δεν διαφέρουν με στατιστικά σημαντική διαφορά, ενώ η Στ' Δημοτικού με την Α' Λυκείου διαφέρουν μόνο στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων, γεγονός που προκαλεί τη στατιστικά σημαντική διαφοροποίηση μεταξύ τους στο σύνολο των κατ' εκτίμηση υπολογισμών που αναφέρθηκε στον πίνακα 2. Επίσης, η Ε' Δημοτικού με την Α' Λυκείου δεν διαφέρουν με στατιστικά

σημαντική διαφορά στους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς δεκαδικών καθώς και στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (βλ. σημειώσεις 12,13). Όσον αφορά στις υπόλοιπες ηλικιακές ομάδες, αυτές διαφέρουν μεταξύ τους ανά δύο και συνολικά στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς αλλά και στις επιμέρους υποπεριοχές τους.

4.3. Σχέση μεταξύ των διάφορων υποπεριοχών της εκτίμησης των αποτελεσμάτων των πράξεων

Παρακάτω θα εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των διάφορων υποπεριοχών των κατ' εκτίμηση υπολογισμών. Στον πίνακα 4 φαίνεται η συσχέτιση μεταξύ των κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμών ακεραίων με τις υπόλοιπες περιοχές σε όλες τις ηλικιακές ομάδες σύμφωνα με το δείκτη Pearson.

Πίνακας 4: Συσχέτιση των διάφορων περιοχών του τεστ με τους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς ακεραίων

Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί ακεραίων					
	Ε' Δημοτικού	Στ' Δημοτικού	Α' Λυκείου	Β' Λυκείου	Φοιτητές
	Pearson r	Pearson r	Pearson r	Pearson r	Pearson r
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί δεκαδικών	0,289**	0,38**	0,309**	0,43**	0,635**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων	0,289**	0,184**	0,41**	0,49**	0,607**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (2 ερωτήματα)	0,027	0,016	0,061	0,249**	0,361**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (4 ερωτήματα)	-	-	0,163*	0,371**	0,494**

* Η συσχέτιση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας μικρότερο από 0,05.

** Η συσχέτιση είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας μικρότερο από 0,001.

Παρατηρούμε ότι η συσχέτιση των κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμών ακεραίων με τους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς δεκαδικών και τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων είναι στατιστικά σημαντική σε όλες τις ηλικιακές ομάδες. Ωστόσο, η συσχέτιση αυτή γίνεται ισχυρότερη στη Β' Λυκείου και ακόμη ισχυρότερη στους φοιτητές.

Σε ό,τι αφορά τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (2 ερωτήματα), η συσχέτιση γίνεται στατιστικά σημαντική στη Β' Λυκείου και εξακολουθεί να είναι στατιστικά σημαντική και ακόμη ισχυρότερη στους φοιτητές. Όσον αφορά στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών, λαμβάνοντας υπόψη τα 4 ερωτήματα που τέθηκαν στους μαθητές Λυκείου και στους φοιτητές, η συσχέτιση γίνεται ισχυρότερη σε κάθε ανώτερη ηλικιακή ομάδα. Τέλος, παρατηρούμε ότι η συσχέτιση με τους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς δεκαδικών και τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων είναι ισχυρότερη σε σχέση με τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών.

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η συσχέτιση των κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμών δεκαδικών με τις υπόλοιπες υποπεριοχές σύμφωνα με το δείκτη Pearson.

Πίνακας 5: Συσχέτιση των διάφορων περιοχών του τεστ με τους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς δεκαδικών

Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί δεκαδικών					
	Ε' Δημοτικού	Στ' Δημοτικού	Α' Λυκείου	Β' Λυκείου	Φοιτητές
	Pearson r	Pearson r	Pearson r	Pearson r	Pearson r
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί ακεραίων	0,289**	0,38**	0,309**	0,43**	0,635**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων	0,339**	0,405**	0,409**	0,474**	0,6**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (2 ερωτήματα)	0,135*	0,136*	0,077	0,276**	0,531**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (4 ερωτήματα)	-	-	0,218**	0,488**	0,671**

Παρατηρούμε ότι η συσχέτιση με τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων είναι στατιστικά σημαντική και γίνεται ισχυρότερη σε κάθε ανώτερη ηλικιακή ομάδα. Η συσχέτιση με τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών είναι ασθενής μέχρι την Στ' Δημοτικού, μη στατιστικά σημαντική στην Α' Λυκείου και γίνεται στατιστικά σημαντική και ισχυρότερη στη Β' Λυκείου, ενώ στους φοιτητές γίνεται πολύ ισχυρότερη.

Στον πίνακα 6 φαίνεται η συσχέτιση των κατ' εκτίμηση διαιρέσεων ακεραίων με τις υπόλοιπες υποπεριοχές σύμφωνα με το δείκτη Pearson.

Πίνακας 6: Συσχέτιση των διάφορων περιοχών του τεστ με τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων

Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων					
	Ε'	Στ'	Α'	Β'	Φοιτητές
	Δημοτικού	Δημοτικού	Λυκείου	Λυκείου	
	Pearson r	Pearson r	Pearson r	Pearson r	Pearson r
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί ακεραίων	0,289**	0,184**	0,41**	0,49**	0,607**
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί δεκαδικών	0,339**	0,405**	0,409**	0,474**	0,6**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (2 ερωτήματα)	0,053	0,136*	0,095	0,28**	0,45**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (4 ερωτήματα)	-	-	0,283**	0,499**	0,578**

Παρατηρούμε ότι οι κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων σχετίζονται σημαντικά με τους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς ακεραίων και δεκαδικών και οι συσχετίσεις γίνονται ισχυρότερες σε κάθε ανώτερη ηλικιακή ομάδα. Η συσχέτισή τους με τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών είναι μη στατιστικά σημαντική στην Ε' Δημοτικού και στην Α' Λυκείου, στατιστικά σημαντική αλλά πολύ ασθενής στην Στ' Δημοτικού και γίνεται ισχυρότερη στη Β' Λυκείου και ακόμα ισχυρότερη στους φοιτητές.

Στον πίνακα 7 και 8 φαίνεται η συσχέτιση των κατ' εκτίμηση διαιρέσεων δεκαδικών (2 και 4 ερωτήματα αντίστοιχα) με τις υπόλοιπες υποπεριοχές των κατ' εκτίμηση υπολογισμών σύμφωνα με το δείκτη Pearson.

Πίνακας 7: Συσχέτιση των διάφορων περιοχών του τεστ με τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών

Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (2 ερωτήματα)					
	Ε'	Στ'	Α'	Β'	Φοιτητές
	Δημοτικού	Δημοτικού	Λυκείου	Λυκείου	
	Pearson r	Pearson r	Pearson r	Pearson r	Pearson r
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί ακεραίων	0,027	0,016	0,061	0,249**	0,361**
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί δεκαδικών	0,135*	0,136*	0,077	0,276**	0,531**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων	0,053	0,136*	0,095	0,28**	0,45**

Στον πίνακα 7 παρατηρούμε ότι οι κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών παραμένουν ασυσχέτιστες με τις υπόλοιπες υποπεριοχές μέχρι και την Α' Λυκείου, ή παρατηρούμε στατιστικά σημαντική συσχέτιση αλλά πολύ ασθενή. Στη Β' Λυκείου οι συσχετίσεις γίνονται στατιστικά σημαντικές, ενώ στους φοιτητές γίνονται ισχυρότερες.

Πίνακας 8: Συσχέτιση των διάφορων περιοχών του τεστ με τις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών

Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών (4 ερωτήματα)			
	Α' Λυκείου	Β' Λυκείου	Φοιτητές
	Pearson r	Pearson r	Pearson r
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί ακεραίων	0,171*	0,371**	0,494**
Κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί δεκαδικών	0,218**	0,488**	0,671**
Κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων	0,283**	0,499**	0,578**

Όσον αφορά στα 4 ερωτήματα κατ' εκτίμηση διαιρέσεων δεκαδικών παρατηρούμε ότι οι συσχετίσεις τους με τις υπόλοιπες περιοχές γίνονται αρκετά ισχυρότερες στη Β' Λυκείου και ακόμα πιο ισχυρές στους φοιτητές.

Πρόκειται επομένως για μια περιοχή που φαίνεται να μη σχετίζεται με τις υπόλοιπες υποπεριοχές μέχρι την Α' Λυκείου. Στη Β' Λυκείου, στο ηλικιακό σημείο στο οποίο όπως είδαμε παρατηρείται η πρώτη σημαντική βελτίωση στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, οι κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών ενοποιούνται με τις υπόλοιπες περιοχές των κατ' εκτίμηση υπολογισμών.

5. Συζήτηση

Όσον αφορά στην επίδοση στους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις:

- Μεταξύ Ε' και Στ' Δημοτικού ουσιαστικά δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση.
- Η επίδοση των μαθητών της Α' Λυκείου δεν διαφέρει με στατιστικά σημαντική διαφορά από την επίδοση των μαθητών της Ε' και Στ' Δημοτικού, όσον αφορά στους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς ακεραίων και δεκαδικών αλλά και στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών. Διαφοροποίηση παρατηρείται ωστόσο στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων, όπου οι μαθητές της Α' Λυκείου έχουν σημαντικά καλύτερη επίδοση σε σχέση με τους μαθητές της Ε' και Στ' Δημοτικού. Το γεγονός αυτό ενδεχομένως οφείλεται στο ότι μια μικρή ομάδα μαθητών στην Α' Λυκείου που έχει καλή επίδοση στους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς ακεραίων έχει πλέον καλή επίδοση και στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις ακεραίων, ενοποιώντας το δίκτυο γνώσεων τους ως προς την εκτίμηση πράξεων μεταξύ ακεραίων.
- Στα αποτελέσματα που αφορούν στη Β' Λυκείου εμφανίζεται το πρώτο άλμα¹⁴ σε ό,τι αφορά την επίδοση των μαθητών στην εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων.
- Επίσης, καλύτερη επίδοση παρατηρείται και στους φοιτητές σε σχέση με τη Β' Λυκείου.
- Οι συσχετίσεις μεταξύ των υποπεριοχών των κατ' εκτίμηση υπολογισμών γίνονται ισχυρότερες στη Β' Λυκείου και ακόμα ισχυρότερες στους φοιτητές.
- Οι κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμοί ακεραίων, δεκαδικών και διαιρέσεις ακεραίων σχετίζονται σημαντικά σε όλες τις ηλικιακές ομάδες.
- Οι κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών παραμένουν ασυσχέτιστες με τις υπόλοιπες υποπεριοχές μέχρι και την Α' Λυκείου. Στη Β' Λυκείου φαίνεται πως όλες οι υποπεριοχές ενοποιούνται και δημιουργούν περισσότερο συμπαγές οικοδόμημα όσον αφορά στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, το οποίο φαίνεται να γίνεται ακόμα πιο συμπαγές στους φοιτητές.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνεται ότι υπάρχει μια πολύ αργή εξέλιξη της επίδοσης στην εκτίμηση του μεγέθους των αποτελεσμάτων πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων, θέμα το οποίο δεν είχε διερευνηθεί. Αυτό αποτελεί ένδειξη

για την αργή ανάπτυξη της ικανότητας εκτίμησης του μεγέθους των αποτελεσμάτων των πράξεων. Μάλιστα, ενώ οι Sowder & Wheeler, 1987 και Case & Sowder, 1990 αναφέρουν ότι η ικανότητα αυτή αναπτύσσεται μετά την ηλικία των 12 ετών, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας παρέχουν ενδείξεις ότι αναπτύσσεται πολύ αργότερα, οπότε και το γνωστικό οικοδόμημα, όσον αφορά στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, γίνεται πιο στέρεο, θέμα το οποίο παρέμενε αδιερεύνητο μέχρι τώρα.

Επιπλέον, σε όλες τις ηλικιακές ομάδες η επίδοση στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς είναι χαμηλή, όπως άλλωστε προκύπτει και από έρευνες σε διεθνές επίπεδο για την επίδοση μαθητών ή ενηλίκων (βλ. ενότητες 2.1 και 2.2). Ωστόσο στην παρούσα έρευνα αναδεικνύεται με τη χρήση όμοιων ερευνητικών εργαλείων για όλες τις ηλικιακές ομάδες η χαμηλή επίδοση σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης, γεγονός που παρέχει ενδείξεις για το ότι η ενσωμάτωση ορισμένων κριτηρίων εκτίμησης και ελέγχου στα ισχύοντα διδακτικά εγχειρίδια και η διδακτική αντιμετώπιση του θέματος δεν έχει τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Σημειώσεις

1. Οι McIntosh et.al (1997) περιγράφουν την αίσθηση του αριθμού ως *“τη γενική κατανόηση ενός ατόμου του αριθμού και των πράξεων, μαζί με τη δυνατότητα και την τάση να χρησιμοποιήσει αυτήν την κατανόηση με ευέλικτους τρόπους για να κάνει μαθηματικές κρίσεις και να αναπτύξει χρήσιμες και αποτελεσματικές στρατηγικές στον χειρισμό αριθμητικών καταστάσεων”*.
2. Η αντιστάθμιση είναι μια συγκεκριμένη διαδικασία κατά την οποία γίνονται οι απαραίτητες τροποποιήσεις στο αποτέλεσμα ώστε να επιτευχθεί καλύτερη προσέγγιση, σε αντιστοιχία με τις τροποποιήσεις που υπέστησαν τα αρχικά αριθμητικά δεδομένα κατά τη φάση της αναδιατύπωσης (διαδικασίας μετατροπής των αριθμητικών δεδομένων για την παραγωγή μιας πιο εύχρηστης νοερής μορφής, η οποία αφήνει τη δομή του προβλήματος ανέπαφη) σε σχέση πάντα με την πράξη (Reys et al., 1982).
3. Επιλέχθηκε και η Ε' και η Στ' τάξη καθώς θεωρείται σημαντική η ωρίμανση που επιτελείται κατά τη μετάβαση από τη μία τάξη στην άλλη (Sowder & Wheeler, 1987).
4. Δεν υπήρχε η δυνατότητα να επιλέξουμε μαθητές Γ' Λυκείου, καθώς βρίσκονται σε περίοδο προετοιμασίας για τις πανελλήνιες εξετάσεις και δεν μπορούσαμε να τους επιβαρύνουμε συμμετέχοντας στην έρευνα.
5. Τα ερωτήματα αυτά δεν δόθηκαν στους μαθητές της Ε' και Στ' τάξης καθώς θεωρήθηκαν δύσκολα με βάση πιλοτική έρευνα που πραγματοποιήθηκε. Δόθηκαν αντίστοιχα ερωτήματα στο 1^ο θέμα το οποίο όμως ήταν πολλαπλής επιλογής.
6. Στους μαθητές δινόταν ένα λυμένο παράδειγμα το οποίο παραθέτουμε:
 $13 \bullet 11 \quad 10 < \square < 100 < \square < 1.000 < \square < 10.000 < \square < 100.000 < \square < 1.000.000 < \square < 10.000.000 < \square < 100.000.000 < \square < 1.000.000.000$
7. Το ερώτημα αυτό όπως και το επόμενο δόθηκε μόνο στους μαθητές Α' και Β' Λυκείου και στους φοιτητές.
8. Ο μέσος όρος είναι το πηλίκο του αθροίσματος των σωστά απαντημένων ερωτημάτων κάθε εξεταζόμενης περιοχής όλων των συμμετεχόντων κάθε ηλικιακής ομάδας διά το πλήθος των

- συμμετεχόντων αυτών. Ως σωστή απάντηση θεωρήθηκε η εύρεση τουλάχιστον της σωστής τάξης μεγέθους.
9. p είναι το επίπεδο σημαντικότητας. Με γκρι είναι σκιασμένα τα κελιά όπου η διαφορά είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας μικρότερο του 0,05.
 10. Με γκρι είναι σκιασμένα τα κελιά όπου η διαφορά με την αμέσως προηγούμενη ηλικιακή ομάδα είναι στατιστικά σημαντική σε επίπεδο σημαντικότητας μικρότερο του 0,05.
 11. Το ποσοστό αυτών που επιτυγχάνουν σε τουλάχιστον 4 ερωτήματα στους κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς ακεραίων είναι: Ε' Δημοτικού: 18,1% Στ' Δημοτικού: 21% Α' Λυκείου: 23% Β' Λυκείου: 44,5% Φοιτητές: 52,9%. Το ποσοστό αυτών που επιτυγχάνουν σε 2 από τα 2 ερωτήματα στις κατ' εκτίμηση διαιρέσεις δεκαδικών είναι: Ε' Δημοτικού: 2,6% Στ' Δημοτικού: 3% Α' Λυκείου: 6% Β' Λυκείου: 10% Φοιτητές: 20,9%.
 12. Η Α' Λυκείου δε διαφέρει ούτε με την Ε' Δημοτικού ($t=-0,061$ $p=0,542$).
 13. Η Α' Λυκείου δε διαφέρει ούτε με την Ε' Δημοτικού ($t=-1,77$ $p=0,081$).
 14. Όσον αφορά στο άλμα που εμφανίζεται στη Β' Λυκείου στην επίδοση στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς αξίζει να σημειωθούν τα εξής: η διδασκαλία των δυνάμεων και των ιδιοτήτων τους συμπεριλαμβάνεται στο διδακτικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Α' Λυκείου. Όμως η ικανότητα εκτέλεσης πράξεων με δυνάμεις του 10 και με αριθμούς του τύπου $v \times 10^u$ όπου vN , $1 < v < 100$ και μZ (π.χ. $700 \bullet 800$) αποτελεί προαπαιτούμενη γνώση για την πραγματοποίηση κατ' εκτίμηση υπολογισμών (Κούρκουλος & Τζανάκης, 2000). Επιπλέον, σύμφωνα με πληροφορίες που πήραμε από καθηγητές Φυσικής, η προαπαιτούμενη αυτή γνώση χρησιμοποιείται κατά κόρον στην Α' και Β' Λυκείου στο μάθημα της Φυσικής. Η χρήση της προαπαιτούμενης αυτής γνώσης ως εργαλείο συστηματικής χρήσης πιθανόν αποτελεί έναν παράγοντα που συνεισφέρει ουσιαστικά στην εξήγηση της σημαντικής διαφοροποίησης που παρατηρείται στη Β' Λυκείου ως προς την επίδοση στους κατ' εκτίμηση υπολογισμούς. Ωστόσο το θέμα αυτό χρειάζεται περαιτέρω εμπειρική διερεύνηση.

Βιβλιογραφία

- Bestgen, B.J., Reys, R.E., Rybolt, J.F. & Wyatt, J.W. (1980) Skills of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2, 124-135.
- Case, R. (1985) *Intellectual development*. Orlando, FL: Academic Press.
- Case, R. & Sowder, J. (1990) The development of Computational estimation: A neo Piagetian analysis. *Cognition and Instruction*, 7, 79-104.
- Dowker, A. (1997) Young Children's Addition Estimates. *Mathematical Cognition*, 3 (2), 140-153.
- Gliner, G. (1991) Factors contributing to success in mathematical estimation in preservice teachers: types of problems and previous mathematical experience. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 595-606.
- Κούρκουλος, Μ. & Τζανάκης, Κ. (2000) Η εκτίμηση και ο έλεγχος ως θεμελιώδεις

όψεις της σύλληψης και εκμάθησης μαθηματικών αλγορίθμων. *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*. Π.Τ.Δ.Ε. Παν/μιο Κρήτης, 264-284.

- LeFevre, A., Greenham, S. & Waheed, N. (1993) The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11 (2), 95-132.
- Λεμονίδης, Χ. (2013) *Μαθηματικά της φύσης και της ζωής, Νοεροί υπολογισμοί, Λογάρωζω με το τζιμίδι μ'*. Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζυγός.
- Lemonidis, Ch. & Kaimakami, A. (2013) Prospective elementary teachers' knowledge in computational estimation. *Menon: Journal of Educational Research*, Issue 2b, 86-98.
- Λεμονίδης, Χ. & Νόλκα, Ε. (2013) Οι συμπεριφορές επίλεκτων μαθητών σε κατ' εκτίμηση υπολογισμούς, οι μεταγνωστικές τους ικανότητες και η συσχέτισή τους με την ικανότητα επίλυσης προβλήματος. Υπό δημοσίευση.
- Lemonidis, Ch., Mouratoglou, A. & Pnevmatikos D. (2014) Elementary teachers' efficiency in computational estimation problems. *Menon: Journal Of Educational Research*, 1st Thematic Issue, 147-158.
- Ματσαγγούρας, Η. (2000) *Στρατηγικές Διδασκαλίας-Η κριτική σκέψη στη διδακτική πράξη*, τομ. Β'. Αθήνα, εκδ. Gutenberg.
- McIntosh, A., Reys, B., Reys, R., Bana, J. & Farrell, B. (1997) *Number sense in school mathematics*. Perth: MASTEC.
- Midlenhall, P. (2011) Enhancing the teaching and learning of computational estimation in year 6. *Thesis: Doctorates and Masters*, Paper 387, <http://ro.ecu.au/theses/387>.
- Montague, M. & Garderer, D. (2003) A Cross-Sectional Study of Mathematics Achievement, Estimation Skills, and Academic Self-Perception in Students of Varying Ability. *Journal of Learning Disabilities*, 36 (5), 437-448.
- Reys, R.E., Rybolt, J.F, Bestgen, B.J. & Wyatt, J.W. (1982) Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 183-201.
- Reys, B., Reys, R. & Penafiel, A. (1991a) Estimation Performance and strategy use of Mexican 5th and 8th grade student sample. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 353-375.
- Reys R., Reys B., Nohda, N., Ishida, J., Yoshikawa, S. & Shimizu, K. (1991b) Estimation Performance and strategy use of fifth and eighth grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 22, (1), 39-58.
- Rubenstein, R. (1985) Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 106-119.

- Sowder, J. & Wheeler, M. (1987) *The development of computational estimation and number sense: two exploratory studies*. (Research report), San Diego State University Center for Research in Mathematics and science Education.
- Sowder, J. & Wheeler, M. (1989) The development of concepts and strategies used in computational estimation. *J.R.M.E.*, 20, 130-146.
- Sowder, J.T. (1992) Estimation and number sense. In D.A. Grouws, (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Macmillan Publishing Company, New York, 371-389.
- Tsao, H. & Pan, T. (2010) The Study of the Computational Estimation Performance and Computational strategy. *Educational Research & Development*, 13 (1), 12-42.
- Volcova, T. (2005) Characterizing middle school students' thinking in estimation. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 289-296. Melbourne: PME.
- Χαλεπάκη, Γ. (2014) Στοιχεία για τις επιδόσεις μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης καθώς και φοιτητών σε κατ' εκτίμηση πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις. *Πρακτικά 5^{ου} Συνεδρίου ENEΔΙΜ*. Φλώρινα 14, 15, 16 Μαρτίου, 2014, <http://enedim2014.web.uowm.gr>.